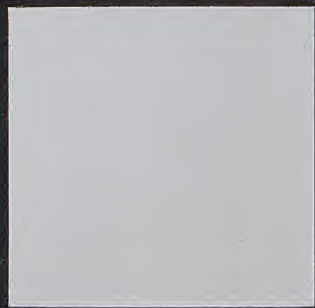


colorchecker CLASSIC



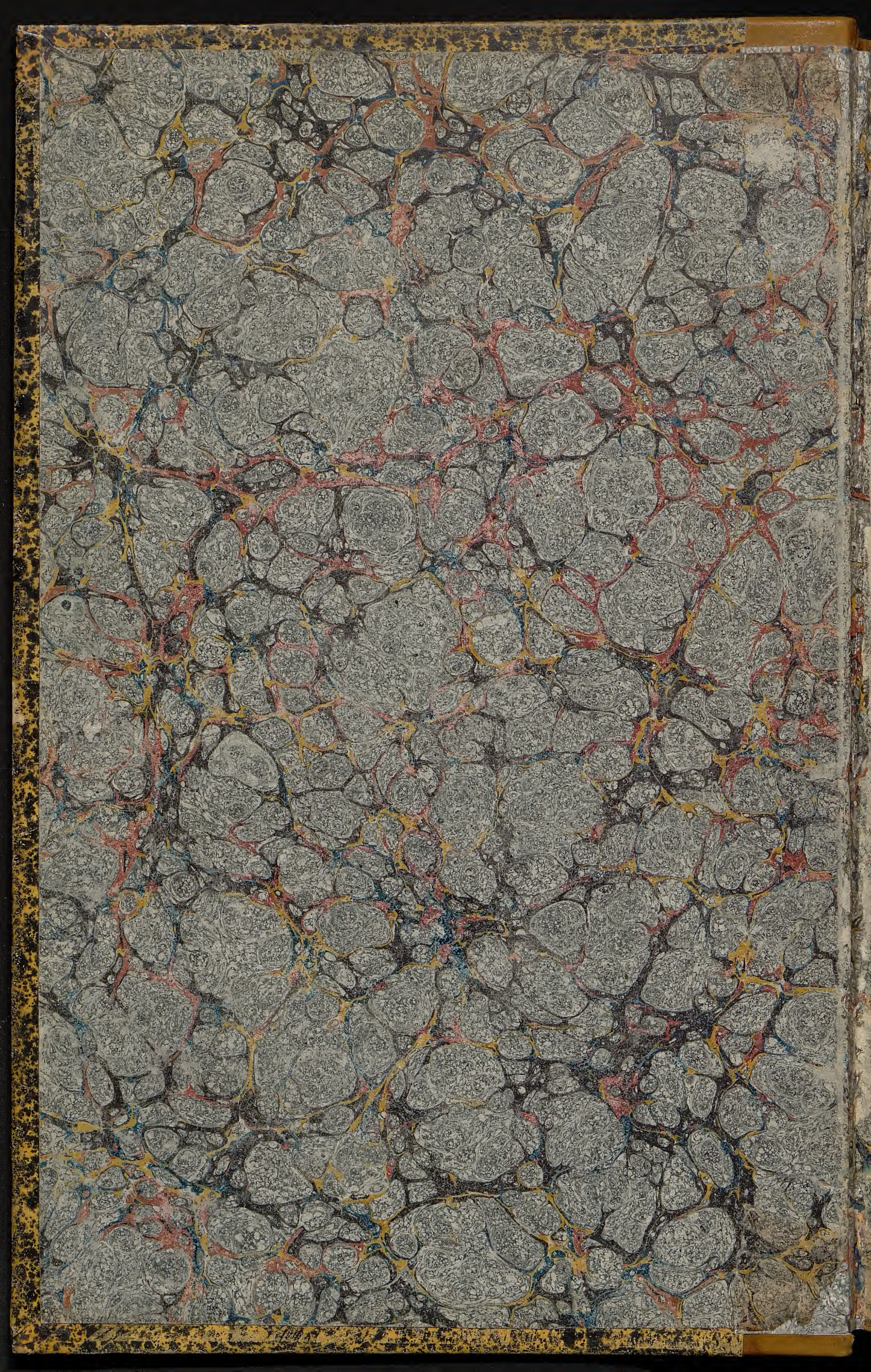
x-rite

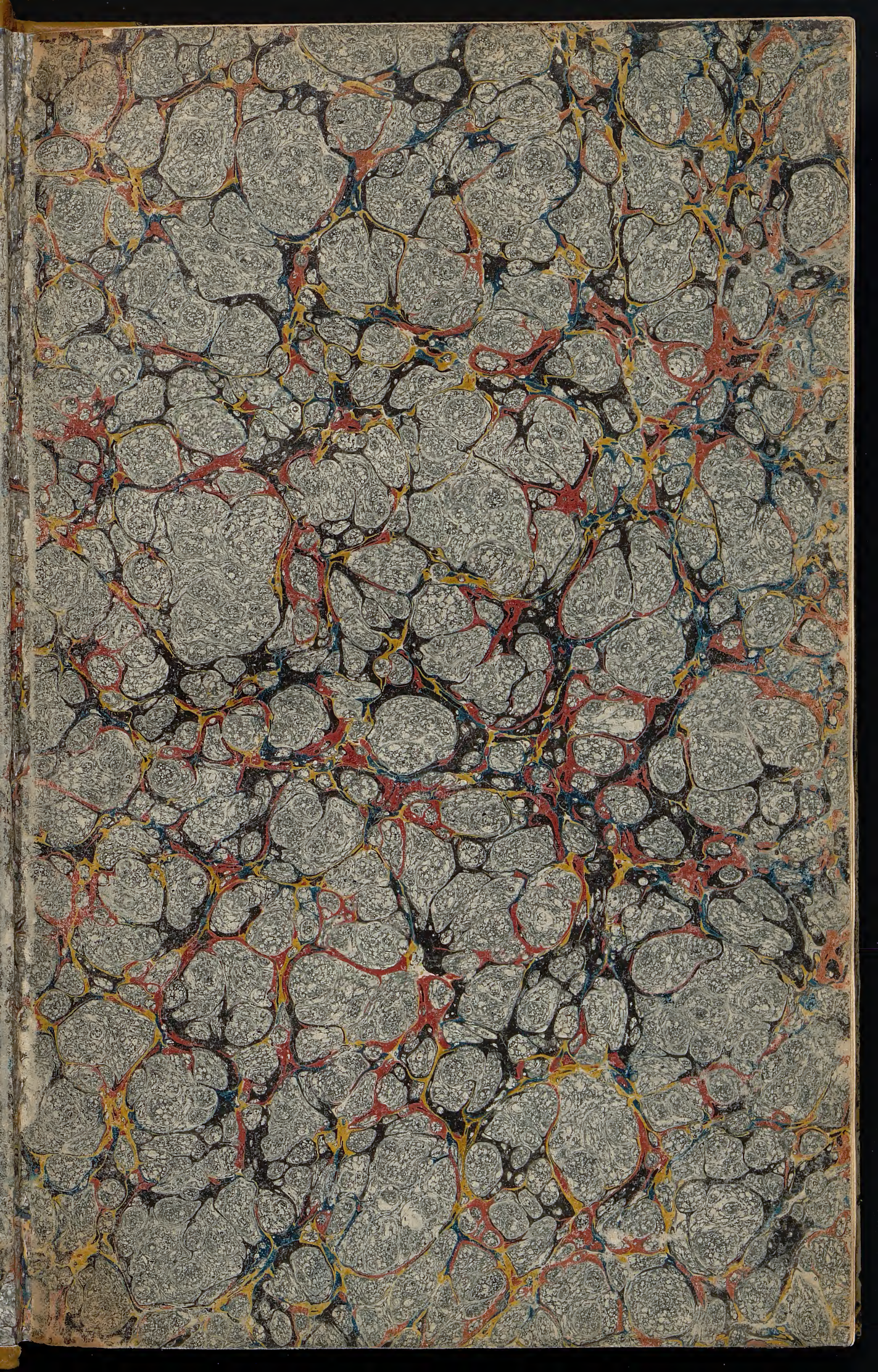
mm

ASTRONOMIE
—
NOTES DE
COSMOGRAPHIE

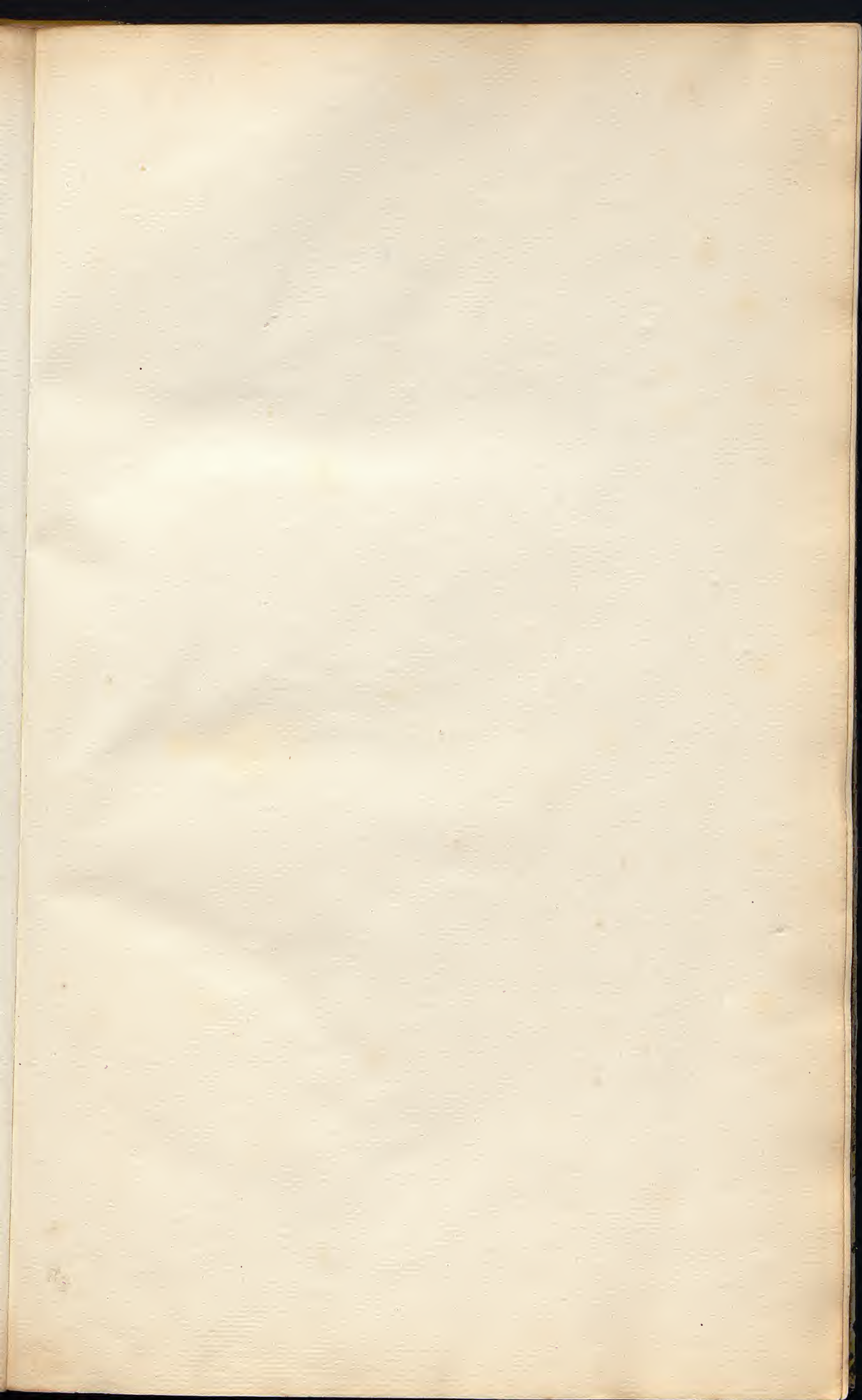
E. M.

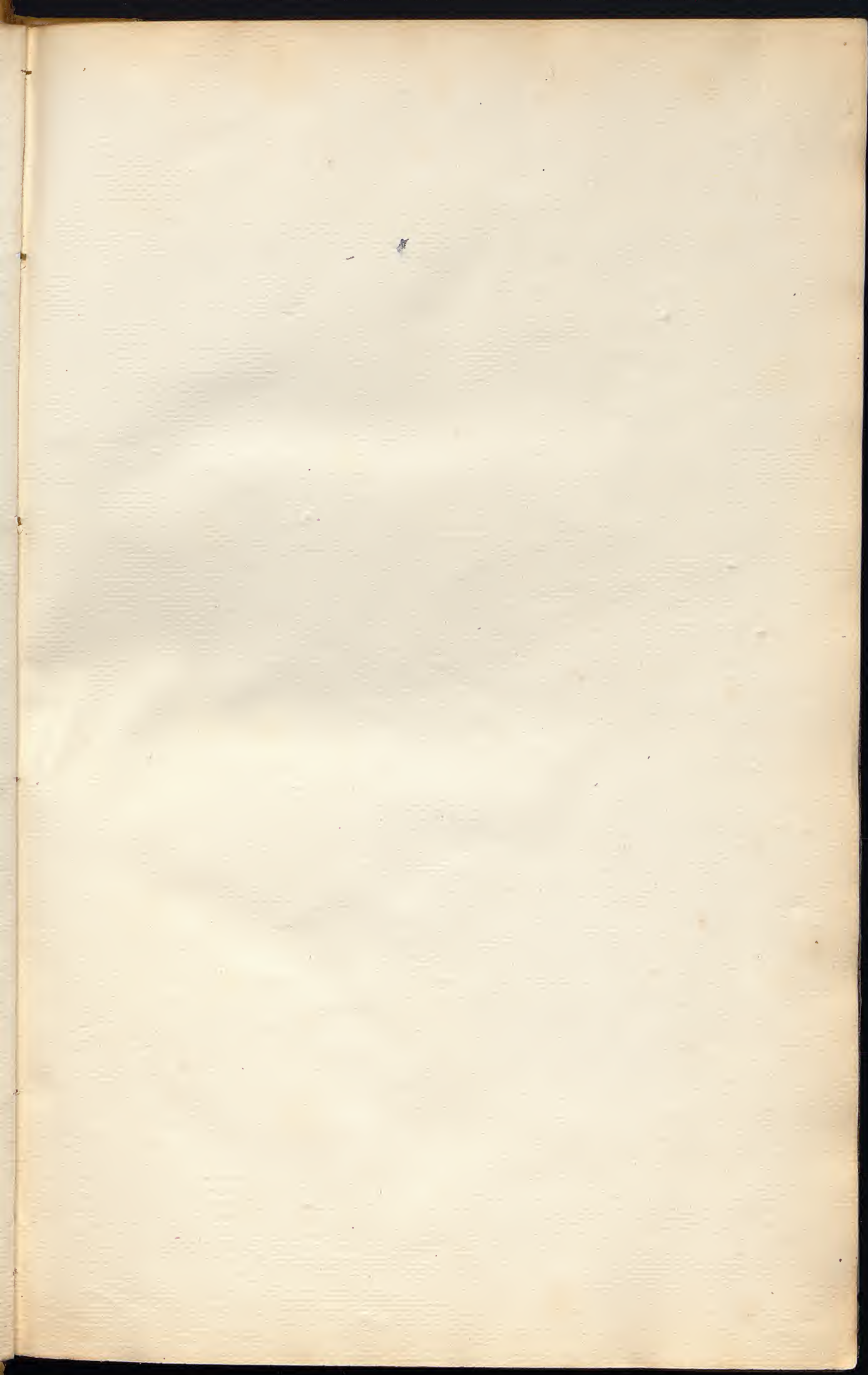


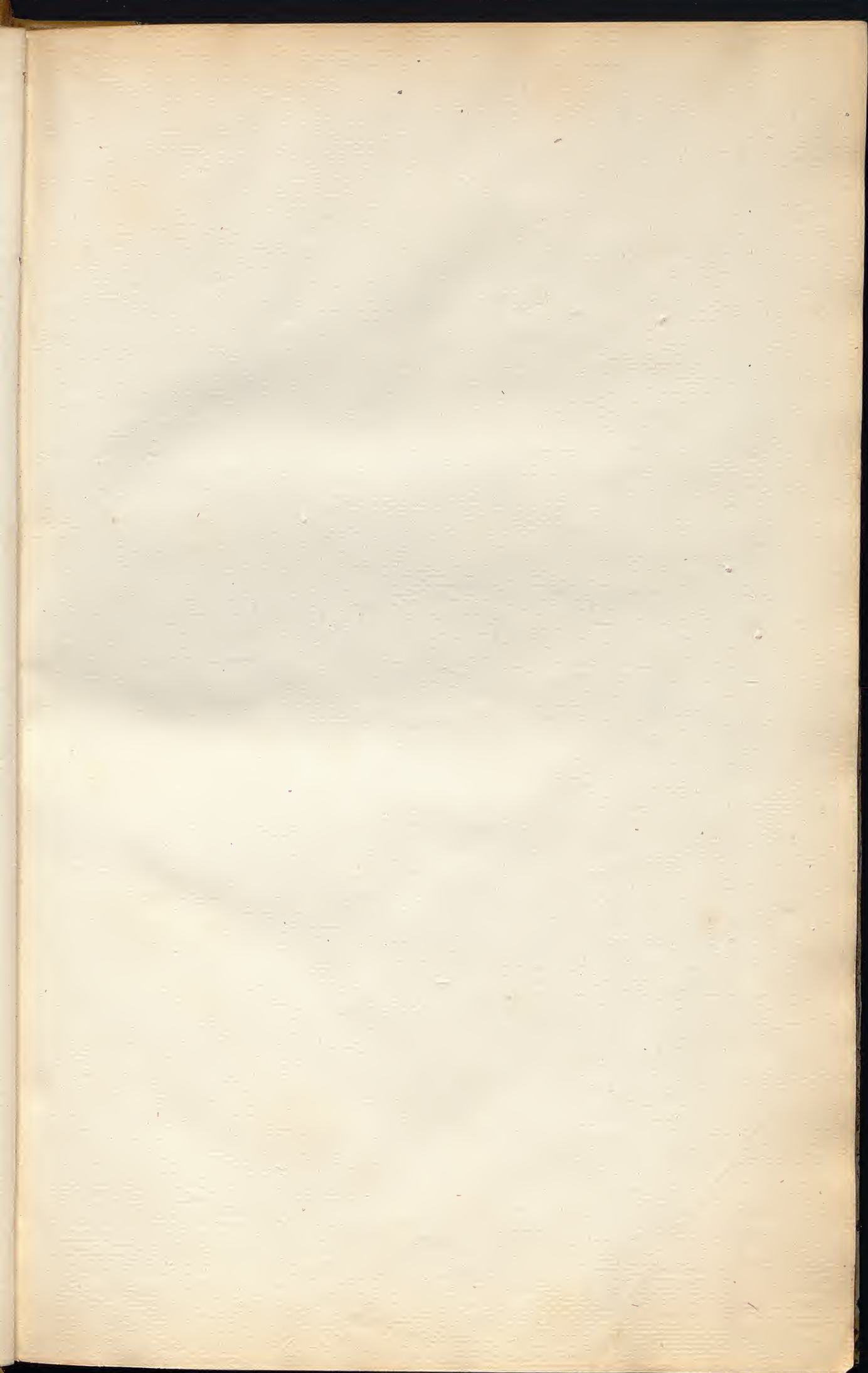




Ms 210







15

astronomie .

Notes de Cosmographie.

W. Gaudin



Ms 210

Extraits du Cours de M^r. Leverrier,
Sesfent à la Sorbonne, l'année Classique 1873-1874.

Deuxième Leçon.

1. Dans une science aussi avancée que l'astronomie, et qui est constituée depuis plusieurs siècles, tous les phénomènes s'enchaînent. Et pour traiter de chacun d'eux en particulier, il est impossible de ne pas faire allusion à la plupart des autres, ainsi commencerons-nous par une exposition générale de l'ensemble de ces phénomènes.

2. L'astre qui a le plus d'utilité et d'importance pour nous est le Soleil. Sa masse est énorme. Son Diam. = 110 fois celui de la Terre, et Vol. = 1.400.000 f. celui de la Terre.

Placé au centre de notre système planétaire, le Soleil est composé d'une masse que l'on ne croit pas aussi brillante que l'intérieur. Cette partie intérieure, appelée Photosphère, est la seule qui nous envoie les Ray. vibrations lumineuses et calorifiques. — on a déduit cette conséquence de l'observation de la Lumière et des Taches Solaires.

Le jour a lieu quand le Soleil est au-dessus de l'Horizon. — La nuit existe quand il est au-dessous.

C'est pendant la nuit qu'on aperçoit les Etoiles.

3. Les Etoiles sont autant de Soleils. — on les range par Grandeurs. Certaines observations ont conduit à penser que les Etoiles de 2^e Gr. sont comparables à notre Soleil : de sorte que cet astre, s'il prenait place parmi les Etoiles, n'en serait pas la plus brillante.

Malgré leur énorme masse, les Etoiles nous envoient bien peu de lumière. Cela vient de leur grande distance, et de la loi d'atténuation que l'intensité de la lumière varie en raison inverse du carré de la distance. La distance du Soleil à la Terre n'est rien en comparaison de l'éloignement des Etoiles.

On a pu mesurer la distance de la Terre à quelques Etoiles, et l'on a trouvé que la plus voisine de nous (α du Centaure — Hemisphere australe) est à une distance du Soleil = 300.000 fois la distance de la Terre au Soleil. La 61^e du Cygne est la plus voisine après, et elle est 3 f. plus loin.

Nous ne pouvons représenter ces distances ni les mesurer à l'aide des longueurs qui sont à notre disposition. — Mais, pour en avoir une idée, rappelons-nous que la lumière fait à peu près le tour de la Terre en $\frac{1}{2}$ 2. Seconde de Temps. Dans une seule oscillation du pendule battant la seconde, la lumière fait 7 à 8 fois le tour de la Terre. Pour venir du Soleil jusqu'à nous, elle met 8 m. 17^s. — Or, α du Centaure pourrait cesser d'exister, et nous ne nous en apercevions que dans 4 années ! — la 61^e du Cygne, après 12 années ! — Herschell disait que le Créateur a été peu prodigue de matière : il faudrait plutôt dire qu'il a prodigé l'Espace à la matière.

4. Il ne faudrait pas croire qu'aucune loi ne prévaille au groupement des étoiles dans le ciel.

Si nous considérons les étoiles les plus voisines de notre Soleil, et que nous les représentions par des points, nous aurons un certain groupe. Mais, dans ce groupe, y a-t-il un nombre indéfini de points? y en a-t-il toujours à des distances de plus en plus grandes? Non. Nous admettons que les étoiles les plus voisines du Soleil forment un certain groupe très-considérable, mais isolé, comparable aux îles nombreuses de l'archipel des mers du Sud. - au-delà, il n'y en a plus.

5. Mais, avec des lunettes puissantes, on voit qu'à des distances beaucoup plus grandes, il y a d'autres groupes analogues formés d'étoiles très-brillantes.

Les autres nébuleuses, vues avec un faible grossissement, apparaissent comme de petits disques blanchâtres. Puis, avec des grossissements de plus en plus grands, on les voit se résoudre en étoiles. -

on compte les nébuleuses par milliers.

6. Quel est le nombre des étoiles qui se trouvent dans notre nébuleuse? Les dimensions de ce groupe sont énormes: l'étoile la plus voisine est telle que la lumière met 4 ans à nous venir. Pour d'autres, Sirius, Castor et Pollux, Procyon, elle met 2^e ans. Et il y a des étoiles visibles dans nos télescopes qui sont 1000 fois plus éloignées: leur lumière mettrait des milliers d'années à nous venir. Elles sont pourtant dans notre nébuleuse.

Herschell avait cru qu'avec son télescope, il avait découvert les dernières étoiles de notre nébuleuse: et il avait cru pouvoir assigner les dimensions du groupe. - Depuis, il a reconnu son erreur: avec des instruments plus puissants, il en a vu de nouvelles. on ne peut donc pas se flatter d'arriver jamais aux limites de cette nébuleuse.

En sommant toutes les étoiles qu'il en a pu y apercevoir, on en trouve 25 000 000: il y en a peut-être 1000 fois plus.

7. Les dimensions de chaque nébuleuse ne sont rien, si on les compare aux distances qui les séparent les unes des autres.

8. Jetons maintenant un coup d'œil plus attentif sur les étoiles d'un groupe.

Lorsqu'on observe au moyen de lunettes ces étoiles disséminées dans le ciel avec tant de profusion, on voit qu'à côté de Castor, par ex. il se trouve une autre étoile dont la distance à Castor est très-petite par rapport aux distances des étoiles les unes des autres. L'ensemble de ces deux étoiles est une étoile double. - et Delta Cygne est aussi double: la 61^e. du Cygne, également: tandis qu'Arcturus et bien d'autres sont simples. - on arrive ainsi à cette conclusion que beaucoup d'étoiles sont formées de deux autres dont la distance est très-petite par rapport à celle de deux étoiles ordinaires.

Herschell conclut de là que ces étoiles ne sont pas voisines seulement en apparence, mais aussi en réalité.

En observant attentivement η de la Couronne, on a vu l'étoile B se déplacer et tourner autour de A en 68 ans. - C'est une preuve que ces 2 étoiles sont réellement voisines, et enchaînées l'une à l'autre par



les lois de l'attraction.

Le quart Des Etoiles doubles est ainsi formé de deux soleils qui tournent les uns autour des autres, absolument comme une planète tourne autour du soleil. La nature de ces mouvements nous donnera des indications sur les masses de ces Etoiles. - C'est ainsi que nous reconnaitrons que la 61^e du Cygne a une masse égale au quart de celle du soleil.

Une étoile d'Andromède est composée de 3 soleils. - Une autre est formée de 4. - Un dans la Nébuleuse d'Orion, il y en a 6.

9. En général, ces soleils liés entre eux ne sont pas de la même couleur. Si l'un est blanc, l'autre est vert; si l'un est blanc, l'autre est rouge...

Singuliers jeux de lumière que forment ces soleils éclairant un même corps.

Il y a un groupe de 110 Etoiles de ~~l'Orion~~ la couleur: on peut le comparer à une brillante pièce de bijouterie.

10. Le mouvement étant une propriété générale de la matière, on doit bien prévoir que les Etoiles ne sont pas immobiles, et que d. de la Lyre, la 61^e du Cygne, etc. se déplacent. - Dans l'origine, on appela les Etoiles des Fixes. Mais depuis un siècle, on a reconnu l'erreur. on a vu Sirius, arcturus se déplacer de 2" par an. Les déplacements s'ajoutent d'année en année. La 61^e du Cygne marche chaque année de 7" dans le ciel. Une des Etoiles de l'ourse parcourt 7" par an: Il lui faudrait environ 190 000 ans pour faire le tour du ciel.

La vitesse de ces mouvements est considérable. ainsi, la 1830^e de Cambridge marche plus rapidement que la Cérès, qui fait 7 lignes par Seconde: - les mouvements angulaires sont très-petits, mais la vitesse réelle est très-grande.

Quelque rapides que soient ces mouvements, ils sont lents par rapport aux distances qui séparent les Etoiles les unes des autres. ainsi, n'a-t-on pu jusqu'à présent obtenir que de petits éléments des Trajectoires stellaires. Mais il n'y a aucun doute qu'il ne soit donné aux générations à venir de voir ce chemin se dévoiler. - Une étoile pourra ainsi arriver jusqu'aux limites de la Nébuleuse, et en sortir: mais bientôt, l'attraction de l'ensemble l'y feraient rentrer. ainsi, les Etoiles voyagent dans leur groupe, et celles que nous apercevons maintenant pourront devenir invisibles.

De même, les Nébuleuses peuvent se déplacer les unes par rapport aux autres: mais ces mouvements sont très lents.

11. Si toutes les Etoiles ont des mouvements propres, nous ne devons pas supposer que notre soleil ait eu le privilège de ne pas se mouvoir.

L'observation a montré en effet qu'il se meut. on est arrivé à cette conclusion en examinant l'ensemble des mouvements des Etoiles, et l'on a vu qu'il se dirige maintenant vers la constellation d'Hercule, en entrant dans une lui sont son cortège de planètes. -

Mais quelles distances nous mène-t-il? (M^r de la Hire n'a pas la prétention de sonder ce mystère.)

12. Quelques esprits ont cherché à reconnaître par l'observation si les ciels sont incorruptibles, comme le disait Aristote, si quelque chose peut naître, quelque chose s'évanouir. - C'est là une question très-difficile à résoudre. Comment reconnaître d'une manière certaine que des Etoiles ont disparu?

Nous ne pouvons qu'i Comparer les cartes célestes exécutées de nos jours avec
avec les catalogues de Flamsteed, dressés en 1690. On reconnait ainsi que certai-
nes de ses étoiles ne se trouvent plus sur les cartes actuelles: il en manque
plus de cent. S'il n'en manquait qu'une ou deux, il n'y aurait rien à dire:
mais eut! Mais aussi on a reconnu que Flamsteed avait fait des erreurs
d'écriture. - voilà la difficulté qui fait qu'on ne pourra jamais sans doute
résoudre la question, car aucun catalogue n'est exempt d'erreurs.

13. Cependant, Herschell en Angleterre a observé à diverses reprises une très belle
étoile, qui a disparu quelques années après: on ne l'a plus vue depuis.
Il y aurait donc des étoiles qui pourraient s'éteindre?

Certains astronomes ont prétendu qu'il existe des nuages cosmiques non
lumineux, et non transparents: alors, leur interposition ferait que l'étoile
a disparu.

Il est aussi apparu des étoiles qu'on n'avait jamais vues auparavant.
Hipparque, dans le but d'être utile à ses successeurs, a construit son cata-
logue à la suite de l'apparition de nouvelles étoiles.

Cela peut s'expliquer encore au moyen d'une hypothèse des nuages
cosmiques.

14. Il existe aussi des étoiles périodiques, et dont l'éclat varie d'une
manière régulière.

En 2^{ème} année Algol passe de la 2^{ème} à la 4^{ème} grandeur, puis elle
revient à la 2^{ème}, à la 3^{ème}, etc. - on a fait là-dessus diverses hypothèses.

Omikron de la balance, est aussi périodique: sa période est de 11 mois.
Durant 5 mois, cette étoile est visible, pendant 6 autres, elle a disparu.
Durant les 2^{èmes} mois de la moitié du 3^{ème}. D'imperceptible qu'elle était, elle
arrive à la 2^{ème} grandeur, et elle s'éteint ensuite. Evident: un pareil phénomène
est dû à la constitution intime de l'étoile.

Il y a aussi des étoiles périodiques pour lesquelles la variation de
la lumière s'accomplit en plusieurs années.

Pourquoi n'y aurait-il pas des étoiles pour lesquelles la période
serait de 50 ou 60 ou 200 ans? - Et alors les étoiles nouvelles et
celles qui ont disparu s'expliqueraient facilement.

15. Dans ces dernières années dans le but d'augmenter le nombre des
petites planètes, on a fait des cartes très précises de certaines parties du
ciel, et M^{rs} Hind, en comparant sa carte avec une autre faite 3 mois
auparavant, a vu qu'une étoile rouge jaunâtre avait apparu là où
il n'y en avait pas. - ce pourrait être une étoile périodique.

16. Phénomènes qui ont apparu tout-à-coup. - Kepler. - Tycho-Brahe.
Cassiope, 15 octobre 1592. - Histoire.

Nous allons maintenant nous référer à notre système, qui
est maintenant bien établi. - alors nous pourrions prendre des mesures
plus précises, et appliquer avec espérance toutes les lois découvertes pour
la mécanique.

2^e. Leçon.

17. autour des Soleils que nous avons nommés Étoiles circulent probablement des planètes. Mais on ne les a jamais vues, et il est probable que jamais non plus on ne les apercevra.

18. Notre Soleil particulier, comme nous l'avons déjà dit, est un corps sphérique et lumineux. — Il est parfaitement sphérique : car, premier de diam. Dans un sens, puis dans un autre, et l'observation donne toujours le même résultat. Ceci est d'accord avec la théorie de l'attraction : car la rotation de cet astre est très-lente, et n'a pas dû exercer une grande influence sur sa figure.

19. autour du Soleil, et à des distances variables, circulent d'autres corps non lumineux pour eux-mêmes, et qu'on appelle des Planètes.

20. Notre Terre est une planète. — Elle est très-petite par rapport au Soleil, et elle est aussi à peu près sphérique. Son diamètre est environ le 116^e. De celui du Soleil. Si le Soleil était figuré par un globe de 1^m. De diam. celui qui représenterait la Terre aurait moins de 1 centimètre.

21. Mercure, beaucoup plus petit que la Terre, est aussi plus près du Soleil. Puis vient Vénus, entre le Soleil et Mars la ^e Mercure et la Terre, qu'elle égale sensiblement en grosseur. — Puis, Mars. — Puis Jupiter, dont la masse est 355 fois plus grande que celle de la Terre : son diamètre est 7 fois celui de la Terre. Saturne, qui vient ensuite, est plus de 3 fois $\frac{1}{2}$ gros comme la Terre. Uranus est les $\frac{2}{3}$ de Saturne en diamètre.

Neptune est un peu plus gros qu'Uranus,

Donc, si l'on classe les Planètes par ordre de grosseur, on aura

Jupiter. — Saturne. — Neptune. — Uranus. — { la Terre } — Mars. — Mercure.

Plusieurs planètes se désignent souvent par des signes que nous ont légués les anciens :

♂ ♀ ☿ ♀ ♃ ♄
Mars Vénus Terre Mars Jupiter Saturne

Toutes ces planètes ne sont sphériques qu'à peu près.

L'aplatissement de la Terre est d'environ $\frac{1}{230}$.

Jupiter est le plus aplati : son aplatissement est de $\frac{1}{16}$: c.à.d. que si le rayon polaire est 16, le rayon équatorial est 17.

22. occupons-nous maintenant des distances des Planètes au Soleil.

Prenez pour le Soleil un globe d'un centimètre de rayon. Le rayon de la Terre sera 1^m, 10 ; Vénus à 0^m, 7 ; Mercure à 0^m, 4 ; et Mars à 1^m, 5.

La Terre devra être placée à 1^m, 10, Vénus à 0^m, 7, Mercure à 0^m, 4 ; et Mars à 1^m, 5.

Les grosses Planètes sont beaucoup plus loin. — Si l'on représente par 1 la distance de la Terre au Soleil, celle de ♃ sera de 5, celle de ♄ sera 9, celle d'Uranus 18 : celle de Neptune est 30.

Il existe entre toutes ces distances une loi remarquable : — Loi ! le mot est un peu ambitieux ; — mais on ne peut l'omettre.

Vient-on trouver les distances du Soleil aux planètes Mercure, Vénus, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus ? Prenons la progression géométrique :

Soleil.

• Mercure

• Vénus

• La Terre

• Mars

• Jupiter

• Saturne

• Uranus

• Neptune.

Loi de Bode.

	0	0,3	0,6	0,1,2	2,2	4,4	9,6	19,2
à deux des Termes, aujourd'hui	0,4	0,7	1	1,6	2,8	5,2	10	19,6
= Distance de	♂	♀	♂	♂	♂	♂	♂	Uranus
	Exact.	Exact.	Exact.	Exact.	Exact.	Un peu gr.	Un peu gr.	Un peu gr.

Cette loi s'arrête là. - on trouverait pour Neptune 38,8, tandis que la vraie distance n'est guère supérieure à 30.

22. Dans la figure précédente, on a placé toutes les planètes les unes à la suite des autres. - En réalité elles se meuvent dans des orbites à peu près sphériques. - La planète Mercure suit d'ailleurs une orbite très-elliptique. - Celle de Mars l'est aussi, mais un peu moins.

23. Durées des Révolutions dans ces orbites:

Mercure	- 88 jours.
Vénus	- 224 "
Terre	- 365 $\frac{1}{4}$
Mars	- 707
Jupiter	- 12 ans.

et les autres, encore plus:

Saturne	- 30 ans
Uranus	- 84 "
Neptune	- 170 à 190.

Les Durées de ces Révolutions sont liées par une loi très-précise avec les Distances des Planètes au Soleil: c'est la 3^e loi de Kepler, et il a été 17 ans à la trouver.

24. Quand deux Planètes se trouvent en ligne droite avec le Soleil, on dit qu'elles sont en Conjonction.

Les astronomes Chinois signalent une grande Conjonction qui aurait eu lieu entre toutes les planètes qu'ils connaissaient. - Mais l'exactitude de nos tables astronomiques est telle que nous pouvons affirmer que cette Conjonction n'était pas précise: autrement, il faudrait remonter à plusieurs milliers de siècles.

Dans l'astrologie, toute Conjonction menaçait la destruction d'un empire. Mais aujourd'hui!!

25. Dans la loi de Bode, j'ai écrit un nombre au-dessous duquel il n'y a le nom d'aucune planète: c'est entre les nombres qui correspondent à Jupiter et Mars. C'est qu'en effet, suivant cette loi de décroissance, il y a à cette distance du Soleil la place d'une planète qui devrait s'y trouver: il le faudrait prouver que la loi indiquât ce nom et se prolongeât jusqu'à Uranus. - Kepler disait qu'il y avait là un hiatus dans le ciel: et les anciens astronomes se préoccupaient beaucoup de ce vide.

Maintenant, ce vide est rempli par plus de 10 corps, et, d'ici à 10 ans, on pourra aller jusqu'à la centaine si l'on y met du zèle: (ici, M. Lév. ajoute: Je ne me suis pas mis à la Remarque du procédé d'invention qui a fait découvrir ces petites planètes: on a commencé par où je finis, par l'observation. Mais quand on veut aller plus loin, il faut suivre une marche synthétique.)

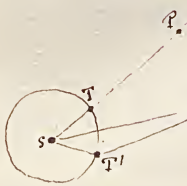
26. Le 1^{er} jour de la 1^{re} année de ce siècle, le 1^{er} janvier 1800 fut celui où la 1^{re} petite planète de ce groupe fut trouvée par Piazzi, l'écuyer attaché à l'observatoire de Palerme. Il observa une petite étoile qui n'était pas dans son Catalogue, et l'inscrivit. Un autre jour, il la rechercha, elle n'était plus à la même place.

C'était donc un astre errant, Cérès, qu'il appela *Verginandea*. — on n'en avait alors observé dans le ciel qu'un arc très-petit; puis elle s'était perdue dans le crépuscule, de manière qu'on n'avait pu faire depuis qu'un très-petit nombre d'observations. Une crainte s'empara des astronomes: pourrions-on la retrouver? — Cela peut nous étonner maintenant que nous savons qu'après 18 jours d'observations, on connaît l'orbite d'une planète. — Mais à cette époque, les connaissances astronomiques étaient moins avancées qu'à présent: et d'ailleurs, la détermination de l'orbite d'une planète offre en effet beaucoup de difficultés. — Si nous étions au centre du Soleil, et que nous pussions observer une planète dans quelques-unes de ses positions, nous aurions la loi du mouvement, et nous pourrions en conclure la marche de la planète. — Mais nous sommes sur la Terre; et, en même temps qu'on observe la Terre marche: et en outre, on connaît simplement la direction dans laquelle se trouve l'astre: mais on ne sait rien des distances: c'est là ce qui complique la question. Si l'on savait la distance exacte, par une triangulation, on saurait quelle est la distance de la planète au Soleil. car, avec ST' , et $T'P'$, on calculerait facilement SP' . — C'est en s'aidant de considérations de mécanique que Gauss est arrivé à résoudre le problème au moyen de 3 observations: son mémoire est intitulé: *Theoria motus Corporum Coelestium in sectionibus Conicis circa So-lem ambientium*. — Il n'est pas inutile de relever ici une erreur fréquente. On croit que, construire une orbite elliptique au moyen de 3 points, c'est le même problème que de trouver l'orbite d'une planète avec 3 observations. Cela n'a aucun rapport, parce que, lorsqu'on donne 3 points pour déterminer une ellipse, on donne ces 3 points physiquement: il y a pour une demi-heure de calcul. — Mais, pour calculer l'orbite, il faut 3 ou 4 jours.

Gauss a fait l'application de sa théorie à Cérès, et a déterminé sa place l'année suivante avec une grande approximation au moyen de 3 observations.

27. Quelque temps après, une nouvelle planète fut trouvée en Allemagne, puis une troisième: et, chose remarquable, ces 3 premières petites planètes se trouvaient juste à la place de l'Hélios. — Cérès était évidemment perdue: c'est une planète elliptique ayant, même dans les limites, une grandeur insensible. — Les anglais n'avaient pas voulu lui donner le nom de planète: ils l'ont appelé un astéroïde, pour la distinguer des grosses planètes telles qu'Uranus, découverte par Herschell, un de leurs compatriotes.

28. Ce fut alors que la sagacité des astronomes et du public s'exerça pour trouver pourquoi il y avait en ce point du ciel trois petites planètes au lieu d'une seule plus grande. — Voici l'hypothèse de l'astronome Olbers. En construisant les orbites des 3 petites planètes déjà découvertes, il trouva que ces 3 orbites se coupent à très-peu près en un même point du ciel. Suivant lui, ce fait ne doit pas être dû au hasard, mais à quelque cause particulière. Il fit remarquer alors que lorsqu'un corps, soumis à l'action unique du Soleil, décrit autour de lui une orbite fermée, quelque allongée que soit cette orbite, le corps revient toujours passer nécessairement aux mêmes points: et alors, la question se transformait pour Olbers de la manière suivante: Si ces trois corps eussent maintenant les uns après les autres en un même point du ciel, ils en ont dû partir ensemble; donc antérieurement il y avait entre Mars et Jupiter une certaine planète qui aurait un beau jour fait explosion, et se serait brisée en morceaux. — Il y avait encore d'autres raisons qui faisaient pencher à Olbers que son hypothèse était l'expression de la vérité. C'est que les grosses planètes se trouvent dans des plans très-peu inclinés



l'orbite de Pallas est inclinée de 32° , et que, sur l'écliptique, d'après des lois connues sur la stabilité du système du monde, cette planète devra y rester éternellement. — on en concluait que, lors de l'explosion, Pallas avait reçu une impulsion perpendiculaire au plan de son orbite.

Lagrange chercha alors ce qui arriverait si une planète était ainsi brisée en éclats, et arriva par le calcul à des résultats analogues.

29. Olbers ajoutait :

Si mon hypothèse est exacte, si les petites planètes proviennent de l'explosion d'une grosse, il doit y en avoir plus de trois : et alors, il y a dans le ciel une sorte de défilé où nous devons trouver tous les morceaux ; et, en les attendant dans ce passage, on les découvrira.

C'est ainsi qu'Olbers découvrit une 2^e. petite planète qu'il nomma Vesta.

Malheureusement, ce fut tout, et l'on eut beau chercher dans ce défilé, on n'y trouva plus rien.

30. Les choses en restèrent là pendant 26 ans. — Mais cela tenait à ce que l'hypothèse d'Olbers était trop hasardeuse. — Si Pallas n'est pas dans le plan de l'écliptique ou au près, cela tient à l'action combinée de Jupiter et de Saturne.

31. Puis, quand on a trouvé les autres planètes, on a vu qu'elles ne passent pas au même point.

Voici les planètes dans l'ordre de leur découverte :

Uranus — Herschell.

Cérès — Piazzi, 1^{er} Janvier 1801.

Pallas — Olbers, 1802

Junon — Harding, 1804

Vesta — Olbers, 1807

Astée — Mencke, 8 Novembre 1845

Neptune — Galle (d'après indicat. de Le Verrier) : Septembre 1846.

Hilée — Mencke, 1^{er} Juillet 1847.

Tris } — Hind { 13 août 1847

Clora } { 18 octobre 1847

Mot... — Graham — 26 avril 1848.

Mais ce n'est pas tout : on en a beaucoup trouvés depuis : M^r. Hind seul en a trouvé 7 : De Gasparis à Naples en a découvert presque autant.

ainsi, il faut renoncer à l'hypothèse d'Olbers ; — et c'est ce que la suite nous fera facilement quand nous serons arrivés à la fin du cours : — l'existence de grosses planètes est beaucoup plus extraordinaire que celle des petites. — En étudiant des causes qui ont pu amener notre système à son état actuel, nous verrons qu'il faut reconnaître ici un cas particulier de la manière générale dont les planètes se sont formées.

3^e. Leçon.

32. Nous allons maintenant nous occuper de la méthode par laquelle on peut Rechercher ces petites planètes. Il ne faut pas croire que leur Découverte soit due au hasard ; et puis, l'histoire qu'elles présentent augmente à mesure qu'on en trouve davantage : car on pourra peut-être trouver une loi dans la disposition de ces petites masses.

33. on ne trouve une petite planète qu'après 2 mois ou 1 an de persévérance : et il y a un très-grand mérite à trouver ces petits astres : on y arrive en comparant très-souvent l'état du Ciel au moment où l'on observe avec un état ~~de~~ constant passé. Immuable et inscrit sur une Carte. Si l'on observait le ciel à ~~bois~~ ^{bois} rompus, on ne trouverait rien. Dans une lunette, en effet, la planète paraît comme une étoile, et, dans le temps très-court d'une observation, on la croit fixe. Il faut donc faire une carte très-exacte. — Quand on dirige la lunette vers une partie du ciel, à cause de la forme du verre, on n'aperçoit qu'un champ très-étroit limité par une circonférence. Il faut représenter sur le papier la situation des étoiles qu'on observe. Quoique les étoiles se comptent par milliers, par millions même, il n'y en a jamais qu'un petit nombre dans le champ, à moins que l'on ne tombe sur une nébuleuse : mais nous supposons ici qu'on ne s'occupe que de notre Groupe. — Il s'agit de faire une bonne carte par un procédé rapide, et avec exactitude pour le but qu'on se propose. — On commence par tendre dans la lunette une série de fils de platine très-fins et verticaux, qui se détachent en noir sur le fond toujours un peu éclairé du ciel : si pourtant on ne les voyait pas, on serait obligé d'éclairer le champ par un procédé artificiel. — Puis on tend une autre série de fils horizontaux. — on peut donc reconnaître les étoiles, et les distinguer d'après les carrés dans lesquels elles se trouvent. — alors, sur le papier, on trace une série de carrés correspondants à ceux du Réticule. à la simple vue, et en estimant à peu près les distances, on transporte sur la carte les étoiles qu'on voit dans le ciel : ... c'est un moyen qu'on pourrait employer pour décrire un paysage.

Nous tout ce que nous pouvons tirer de la position actuelle de la lunette.

On la déplace ensuite, de manière que le dernier Carré de l'ancienne position soit commun à la nouvelle.

Le nombre des étoiles qu'il faut porter sur les cartes est prodigieux, et cette opération demande un temps considérable : — ces cartes n'ont pas été publiées.

La vue d'un astronome ne suffirait pas s'il fallait faire avec une aussi grande précision la carte du Ciel entier. — Mais, remarquons que chaque planète décrit une orbite plane dont le plan passe par le Centre du Soleil : ces orbites sont très-peu excentriques, et couvrent un grand cercle quelconque de la sphère en deux points. On peut donc se borner à explorer avec un grand soin les étoiles situées dans une petite zone très-étroite faisant tout le tour de la sphère : cette carte nous rendra le même service que si la carte embrassait le ciel entier, puisque toutes les planètes y passeront nécessairement. — On a choisi naturellement le grand cercle Écliptique.

Une fois qu'on est pourvu de ces cartes célestes, voici ce qui reste à faire pour découvrir de petites planètes. on observe fréquemment, le plus souvent possible les diverses parties de la carte avec une lunette de manière à revenir aux mêmes points après 15 jours au plus d'intervalle. Si l'on ne trouve rien de changé, on n'a

rien d'inouï. Mais si, une étoile qu'on a inscrite, il est venu s'en adjoindre une autre, il y a du nouveau. — Maintenant, il y a des difficultés. Cette étoile n'existe-t-elle pas avant ? la carte pouvait être inexacte. — Heureusement, ces cartes ont été faites pour un assez grand nombre d'observateurs pour que l'on puisse compter sur leur exactitude. — Mais aussi, ce peut être une étoile nouvelle, une étoile changeante périodique, qui n'avait pas de lumière sur le côté qu'on avait observé d'abord. M. Hind en a observé de pareilles. — Mais si l'étoile nouvelle, le lendemain a changé de place, puis encore le surlendemain, ... alors on peut affirmer que l'on a sous les yeux une planète. — Ce n'est que par cet ensemble de recherches, qu'àprès des années de travail, que l'on arrive au but ambitieux.

Enfin, il reste à constater si cette planète n'est pas identique à celles qu'on connaît déjà. Or, par le calcul ou par des constructions géométriques, on peut avoir, pour une heure quelconque, la position de toutes les planètes connues : il faut donc faire le calcul de la position de toutes les planètes connues pour l'heure de l'observation, et voir si aucune de ces positions ne coïncide avec celle de la planète observée.

34. Revenons maintenant à l'étude des phénomènes généraux que présentent les planètes.

Sans exception, toutes circulent autour du Soleil. — Comment s'accomplissent ces mouvements ? apprenent-ils quelque chose de général ? — Tous s'accomplissent dans des Ellipses ; — mais ce n'est pas ce qui doit encore nous occuper. — Imaginons que, le Soleil étant fixe, la Terre tourne autour du Soleil : la Terre reste toujours dans un même plan. Toutes les planètes décrivent des Orbes plans ; et l'on peut ajouter qu'il en est de même des Comètes : mais, pour tous ces astres, surtout pour les comètes, tous ces plans sont loin de coïncider, et sont inclinés d'une manière q. q. pour ces dernières :

35. Les planètes au contraire observent sans exception dans leur mouvement une loi qui traçait un certain ordre, et nous mettra sur la voie de l'origine de leur formation :

Toutes les planètes se meuvent à très-peu près dans le plan de l'Ecliptique. (nous faisons abstraction de Pluton).

Dans ce plan où, seul quelques légères inclinaisons, se meuvent toutes les planètes,

Elles marchent toutes dans le même sens.

Il est impossible de méconnaître là une trace encore plus frappante d'une origine commune : et nous en trouverons d'autres preuves encore dans les nouvelles analogies que nous reconnaitrons.

36. Cherchons à définir le sens de ce mouvement commun par rapport aux étoiles.

Pour cela, prolongeons dans tous les sens le plan de l'Ecliptique : il partagera la sphère céleste en deux Es Hémisphères dont l'un porte le nom d'Hémisphère Nord, Boréal ou arctique, et l'autre, celui

d' " Sud, austral ou antarctique

Le mot arctique signifie Hémisphère des Ourses : Il y a en effet dans cette partie du Ciel deux Constellations qu'on appelle la Grande et la Petite Ourse.

Maintenant, suivre la règle suivante, tirée au premier abord, mais qui offre le seul moyen dont la mécanique puisse bien définir le sens d'un

mouvement quelconque?

Supposons vous placé Debout au Centre du Soleil sur le plan de l'Ecliptique, la Tête en dehors des Ombres. Dans cette situation, chacune des Planètes passera devant vos yeux en allant de votre droit à votre gauche.

C'est le sens du mouvement, et c'est ainsi que nous pourrions nous Représenter tous les mouvements Célestes.

Le sens de ce mouvement est de l'Ouest à l'Est. — Il s'agit, bien entendu, du mouvement réel, et non du mouvement Apparent.

37. Ces analogies dans le sens du mouvement ne sont pas les seuls qui existent.

Il existe en effet sur le Soleil des Taches. Dont l'observation a montré que cet astre tourne sur lui-même, en 25 jours. — De même que toutes les planètes se meuvent sur l'Ecliptique, de même le Soleil se tourne autour d'un axe perpendiculaire à ce plan (ou à l'axe) de l'Ecliptique: — et cela, dans quel sens? De droit à gauche pour l'observateur placé au Centre du Soleil comme ci-dessus, de l'Ouest à l'Est, dans le même sens que le mouvement des planètes.

Puisque le Soleil tourne sur lui-même, nous sommes conduits à nous demander: — Or, les Planètes n'en font pas autant.

Or, la Terre tourne en 24 h. de l'Ouest à l'Est autour d'un axe un peu incliné sur l'axe de l'Ecliptique.

Les Taches observées sur Mars ont montré qu'il tourne aussi dans le même sens, en 23 h.

Cette énorme planète qu'on appelle Jupiter possède des Bandes Grises qui proviennent peut-être du mouvement Rapide de ses nuages et de ses Taches. — En effet, sa Rotation s'effectue en 10 h: à l'Equateur de Jupiter, les Jours et les nuits ne durent que 6 heures. — De là aussi, le grand aplatissement de Jupiter, qui est de $\frac{1}{11}$. — Ailleurs la Rotation se fait toujours bien dans le même sens.

Il en est de même de Saturne.

ainsi:

En même Temps que les Planètes tournent autour du Soleil, elles tournent sur Elles-mêmes, et le sens de cette 2^e. Rotation est le même que celui de la 1^{re}.

Nous allons nous trouver de nouvelles traces d'une Commune origine.

38. Nous avons dit que le monde Physique est un Ensemble de Nébuleuses, chaque Nébuleuse un ensemble de Soleils, et chaque Soleil est le Centre d'un monde planétaire. — Voilà donc des Ensembles primaires, secondaires et tertiaires. Ce n'est pas tout. — Il y a des corps d'un ordre inférieur qui circulent autour des planètes en suivant les mêmes lois que celles-ci dans leur course autour du Soleil: on les appelle des Satellites. — Il ne paraît même pas étrange qu'il y ait des Satellites de Satellites: dans notre Système Solaire, il n'y en a probablement pas.

Chacun de nous faire une idée de la situation Prospective de ces corps les uns vis-à-vis des autres.

Le Diamètre de la Lune est les $\frac{3}{11}$, ou sensiblement $\frac{1}{4}$ de celui de la Terre.

Les Satellites de Jupiter sont beaucoup moins gros: ce sont des corps extrêmement petits par rapport à la Grandeur de leur Planète. on a cru dans ces derniers Temps leur reconnaître un Diamètre de 1".

Figurons nous une Terre de 1 décimètre de Diamètre. — Son Rayon sera 0^m,05 la Lune se trouve à 0^m,05 x 60 = 3^m. ainsi, la Lune, les dimensions sont très-petites par rapport à la distance.

(Terre)

○ Lune

Pour avoir la Relation d'éloignement avec le Soleil, il nous faut diminuer l'Esphère. Prenons un Soleil de $5^m, 03$. La Terre est à $110 \times 5^m, 03 = 3^m, 3$. Le diamètre de la Terre sera très-petit, et nous le représenterons par un point. Où sera la Lune? La distance du Soleil à la Terre est 24000 Rayons terrestres, ou 110 Diamètres Solaires. Celle de la Lune à la Terre n'est que de 60 Rayons terrestres, c.à.d. $\frac{1}{400}$ de la précédente. La Lune est donc 400 fois plus près de la Terre que celle-ci du Soleil. Or on a $\frac{37^m, 30}{400} = \frac{9^m, 33}{4} = 0^m, 008$, ou 8 mm . C'est bien peu: cela veut donc dire que la Lune accompagne toujours la Terre: ces deux corps sont tellement voisins l'un de l'autre que l'attraction du Soleil ne les peut séparer.

La figure ci-dessous montre à-peu-près ces Rapports. - Elle fait voir aussi que



Lune
Terre

si l'on plaçait le centre du Soleil au centre de la Terre, le globe solaire embrasserait la Lune, et irait une fois au-delà.

La Lune tourne autour de la Terre en décrivant une orbite plane, qui est presque dans le plan de l'Écliptique. - Dans ce plan, quel est le sens du mouvement? Toujours le même.

Enfin, l'observation a montré que la surface de la Lune est Ir régulière, et tra-
vaillée par des éruptions volcaniques. - on a prétendu que l'on avait aperçu certains
lacs, ce qui prouverait que quelques uns de ces Volcans ne sont pas éteints.

De plus, on a reconnu ainsi que le globe Lunaire tourne sur lui-même, et
dans le même sens que celui de sa révolution autour de la Terre: ce qu'il y a de
curieux, c'est que les durées de ces deux rotations sont rigoureusement les mêmes.
39. Nous venons que tous les autres satellites des autres planètes tournent dans
le sens direct.

Il y a exception pour un satellite d'Uranus; mais ce sera le cas de dire que
l'exception confirme la Règle.

4^e. Leçon.

40. Vénus n'a pas de Satellites. - Il y a 169 ans, Dominique Cassini crut en avoir trouvé un. Vénus lui apparaissait comme un disque semi-circulaire, mieux, semi-éclairé: il aperçut à la droite et du côté du soleil un autre disque semi-éclairé qui aurait pu être ~~le~~ son Satellite.

Maraldi, l'un de ses disciples, qui a observé longtemps à l'observatoire de Paris, crut également deux fois apercevoir ce même phénomène. Comme depuis on n'a plus rien vu avec les plus excellents instruments, et comme leurs lunettes étaient bien moins parfaites que les nôtres, on croit qu'ils ont vu un image double.

41. Quant à Mercure et Mars, on ne leur a jamais voulu donner le moindre Satellite.

42. Pour en trouver, il faut aller jusqu'à Jupiter, qui en a quatre, lesquels circulent autour de la planète en même temps que celle-ci les entraîne autour du Soleil.

Ces quatre Satellites sont sensiblement dans le plan de l'équateur de la Planète. Ils tournent tous autour d'elle dans le sens direct.

Ils sont très-petits, paraissent comme des points, et circulent autour de Jupiter avec une grande rapidité.

Les temps de leurs Révolutions sont

42 heures,

Le premier surtout s'éclipse donc très-souvent.

Utilité de ces éclipses pour déterminer avec exactitude la situation des côtes dans l'intérieur des mers: c'est un des phénomènes qui ont le plus contribué à l'avancement de la Géographie.

Vitesse de la Lumière.

La marche de ces Satellites sert aussi à peser la planète, et à trouver que, si on la transportait à la même distance du soleil où se trouve la Terre, elle pèserait 340 fois plus.

Quand on observe ces Satellites, comme on est placé dans le plan de l'équateur de Jupiter, qui est celui de l'écliptique, on se trouve à peu près la Terre, on voit ces Satellites se mouvoir en ligne droite: mais on est averti qu'il n'en est pas ainsi par les ombres portées sur Jupiter.

C'est Galilée qui, après l'invention de sa lunette, découvrit ces Satellites, ainsi que les phases de Vénus et bien d'autres choses encore.

43. Neptune n'a qu'un Satellite, découvert par M. Lasselle.

44. Saturne a un système fort riche: il a plusieurs Satellites, et un corps particulier, très-curieux, l'anneau. - Galilée n'avait rien vu avec sa lunette, qui n'était pas assez puissante.

Huyghens, au moyen d'une grande lunette, aperçut un premier Satellite. On prétend qu'à cette époque, on ne chercha plus, pendant quelque temps, de nouveaux Satellites, et cela, pour une drôle de raison: on connaissait 6 planètes et 6 Satellites, et cela faisait, disait-on, un système complet.

Plus tard, lorsque Dominique Cassini posséda ces grandes lunettes dont l'ouvrage était dans la cour de l'observatoire, et l'objectif sur une tour, il découvrit 3 nouveaux Satellites de Saturne: cela faisait 4.

Après la fin Du Premier Pièce, Sir William Herschell, au moyen De son puissant
Télescope, en trouva 3 autres : - cela faisait 7.

Enfin, il y a Deux ans, on en a trouvé un 8^e que sa proximité De la planète
avait empêché D'apercevoir, et qui exerce la Révolution en 5 jours.

C'est encore M^r. Lasselle, De Liverpool, qui l'a Découvert : on le Rappelle
que c'est lui qui a trouvé le Satellite De Neptunus. - M^r. Lasselle est un amateur D'as-
tronomie. C'est un fabricant De bière, et il fait marcher D'avant une fabrique
et un observatoire qu'il a fait construire avec ses Bénéfices. Avec sa famille
étendue, et les Dames se mêlent Des livres De Commerce et Des Calculs. C'est ce
qui est arrivé à la leur D'Herschell.

Saturne présente une autre Singularité. Découverte par Huyghens. - Lors-
qu'on vint à examiner la planète avec Des Lunettes assez puissantes, on reconnut
que Saturne présentait Des appendices lumineux et oblongs De chaque côté Du Disque.
Parfois ils apparaissaient, tantôt devenaient Invisibles, et affectaient Des formes bi-
-loques. - Huyghens éclaircit l'énigme, et annonça que Saturne était entouré
D'un anneau qui ne touchait pas à la planète, qui était très-large et peu épais.

Il fallait, pour admettre cela, Des preuves bien fortes, D'autant plus qu'à aucune
Époque le phénomène ne se montre ainsi :



car le plan De l'anneau n'est pas très-incliné sur celui De l'Écliptique.
on voit donc toujours le phénomène par la tranche. - Si les deux plans se
fusaient entièrement confondus, on n'aurait vu l'anneau que par la tran-
che rigoureusement : or, cet anneau est si mince, que, dans le cas, qui se
présente quelquefois, où il n'y a que la tranche D'éclaircie, on ne voit rien,
même dans les lunettes très-puissantes.

Mais heureusement, l'inclinaison Du plan De l'anneau fait qu'on le voit
dans une meilleure situation. - voici le dessin De ce qu'on aperçoit dans les cas
les plus favorables :



Il n'y a aucune interruption de lumière : en B, on voit l'ombre De la partie antérieure
De l'anneau. - ainsi, bien qu'on ne voie pas l'anneau, son existence est bien
assurée : car, comme tout le système tourne, il est bien vrai que la partie qui
est Arrière, et que l'on voit à son tour, n'est pas absente : et l'existence De
l'anneau comme tout continu est certaine. - En V et V', il y a une inter-
-ruption de lumière : on voit le ciel, et certains astronomes prétendent même y
avoir vu des Étoiles : cela n'aurait rien D'extraordinaire.

Le plan De l'anneau, on l'a déjà vu, diffère peu De celui De l'Écliptique.
Est-il fixe, ou tourne-t-il ? - Jusqu'ici, on n'a aperçu dans
aucune Tranche qui puisse démontrer physiquement la rotation. - Mais il
ne peut pas ne pas tourner : car une voute sollicitée à tomber vers Saturne,

Dont la masse est considérable, ne pourrout résister, elle si peu épaisse, à cette attraction. ainsi, la théorie indique que l'anneau doit tourner: De plus, elle a montré que la vitesse de rotation nécessaire pour que l'anneau ne se brise pas est précisément la même qu'elle serait pour un satellite placé à la même distance de Saturne.

Cette considération a fait demander s'il n'était pas possible que l'anneau fût une masse de satellites formant un tout continu. - Il n'y a rien qui légitime cette hypothèse.

Cependant, ce que l'on peut affirmer, c'est qu'il y a plusieurs anneaux les uns sur les autres: l'anneau, dans de certaines conditions, présente une fissure noire, qui se reproduit des deux côtés. Il y a donc au moins deux anneaux. On a même cru en apercevoir 3. - ainsi l'anneau n'est pas tout d'une pièce?

Cet anneau est bien sûr l'un des phénomènes les plus curieux du système du monde. - Il nous paraîtra peut-être moins étrange dans les derniers ans de nos jours, lorsque la machine, produite du retrait, ou du se former en anneaux dont la rupture a donné les planètes.

L'anneau de Saturne est un monument de cette première modification de la matière, et les petites planètes en sont une de la modification intermédiaire: suivant les observations des astronomes de Pulkawa, à l'observatoire de St. Pétersbourg, dont les mesures micrométriques sont plus précises que partout ailleurs, l'anneau de Saturne serait destiné à se briser: la distance à la planète irait constamment en augmentant d'un côté et diminuant de l'autre: de sorte que, dans quelques dizaines d'années, l'anneau se frottera contre la planète, et toutes les parties de l'anneau, venant par la rotation passer aux mêmes points, s'abîmeront sur Saturne, et l'anneau sera complètement détruit. - Il est bien sûr d'ailleurs qu'en A il se passe quelque chose d'extraordinaire: car, il y a deux ans, lorsque l'anneau a disparu, on a trouvé du nouveau: on a vu qu'il s'était enrichi d'un nouvel anneau inférieur moins brillant que les autres, mais ayant pourtant encore assez de clarté pour être aperçu. on l'a vu en Amérique et en Angleterre. on ne sait ce que c'est que cet anneau. Est-ce une apparence qui disparaîtra de nouveau? Toujours est-il que son existence est d'autant plus sûre qu'on le voyait pourtant sur la planète une ombre griseâtre.

Et tout cela, concluons que le système de Saturne n'est pas arrivé à un état d'équilibre stable. - Si nous devons voir la destruction de l'anneau, nous devons admettre combien peu d'années ont séparé avant séparé la découverte des comètes de ce cataclysme: - si l'anneau eût été détruit il y a 200 ans, nous n'aurions rien vu.

Après tout, ce mouvement de l'anneau n'est peut-être qu'une oscillation: De même que, de nos jours, la lune va sans cesse en s'approchant de la Terre: De sorte qu'on s'est demandé si elle ne finirait pas par tomber à la surface. Mais, après avoir suffisamment étudié la question, on a reconnu que ce rapprochement devait durer 2000 ans; puis, la lune s'éloignera de nouveau. ainsi, tout est réglé par un ordre admirable.

Nous en discuterons la 2^e Exposition Générale du système du monde.

De la Terre.

45. La première question à traiter est celle De la Terre. - Deux motifs nous y engageant: D'abord, la Terre a pour nous bien De l'Intérêt, et à plus D'un titre; - ensuite, c'est l'observatoire D'où nous ne pouvons sortir, et il faut bien connaître son observatoire, et les monuments.

Nous n'étudierons pas D'abord D'une manière sérieuse la forme De la Terre: plus tard, une loi sera consacrée à la longueur Du méridien et au métre.

46. quand on arrive à connaître la Terre, il y a lieu D'appliquer cette Réflexion que, quand on étudie, on se polir à oublier qu'on apprend. - apparence trompeuse. - Il semble au premier abord qu'il n'y a aucune analogie entre la Terre et les autres Corps Célestes.

Astronomie ($\alpha\sigma\tau\eta\gamma$, $\nu\omicron\mu\omicron\varsigma$) - Astrologie ($\alpha\sigma\tau\eta\gamma$, $\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$).

Dans l'origine, c'étaient deux mots qui désignaient une seule et même chose.

La Terre ne nous paraît pas brillante, comme Vénus, Mars, etc.

Tous les corps célestes sont mobiles: La Terre sur nous paraît immobile.

C'est une Illusion: Mouvements Relatifs: - bateaux - cabins - Wagon.

La Terre est isolée Dans l'Espace: astres qui se lèvent et se couchent.

47. C'est une Sphère.

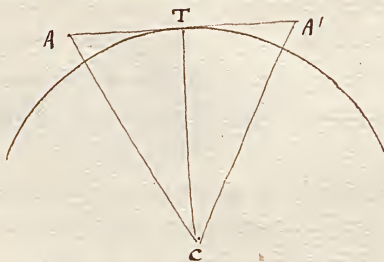
En effet: D'abord, elle est à peu près Ronde: Voyage De Magellan.

Ensuite, on peut montrer que la Terre est une Sphère. - Dans les montagnes, plus on s'élève, plus l'horizon que l'on découvre est étendu.

Phénomène qu'on aperçoit quand on vient De la plaine vers une côte montagneuse.

Si la Terre est une Sphère, il est nécessaire que quand on l'élève, en un point quelconque, D'une même hauteur au-dessus De la surface, on voie toujours la même Étendue. - Or, partout les marins, en mesurant la Dépression De l'Horizon, la trouvent constante.

On peut même obtenir une première approximation Du Diamètre. Supposons en effet deux observateurs, placés en A et A', à 3^m au-dessus Du



niveau De la mer, comme cela arrive Sur le pont Des navires marchands. Le premier voit le second, et réciproquement? Ils cessent De s'apercevoir au moment où le rayon AA' rasera la surface De la Terre. - on trouve alors que $AA' = 12700^m$. - Dans le Triangle Rectangle ATC, on a

$$AT = \frac{12700^m}{2} = 6350^m.$$

$$TC = r \text{ et } AC = 3^m + r$$

Une construction Géométrique ne donnerait rien De bon. elle se Réduirait à trouver un Triangle Rectangle quand on connaît un côté et la Différence

entre l'hypothénuse et l'autre côté: or les deux lignes AT et TC seraient presque parallèles, et le point C mal déterminé. — Mais le calcul donne

$$(r+3)^2 = r^2 + (6350)^2$$

ou

$$r^2 + 6r + 9 = r^2 + (6350)^2$$

d'où

$$r = \frac{(6350)^2 - 9}{6} = \frac{40310000}{6} \text{ à peu près :}$$

$$r = 6\,720\,000^m = 1680 \text{ lieues.}$$

On trouve une dernière preuve de la bonté de la Terre dans les éclipses de lune: d'autant plus que ces éclipses se produisent pour des parties différentes de la Terre, et durent quelques heures, pendant lesquelles la Terre tourne.

à deux lieues en ballon (Gay-Lussac) on aperçoit $\frac{1}{1000}$ de la surface de la Terre.

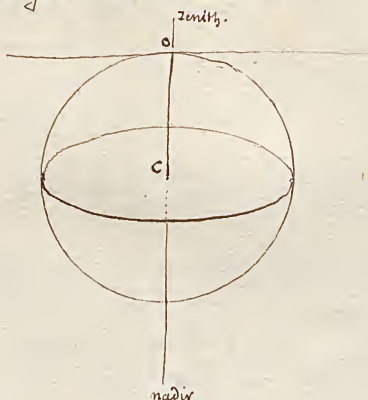
Du sommet de l'Etna et de Teneriffe, c.àd. à 10000 pieds, on en voit $\frac{1}{4000}$ Li8. Montagne. — Ce qui est par rapport au rayon: les pics de l'Himalaya ont 2 lieues, Teneriffe, 1 lieue. — Si l'on faisait une Terre de 3^m de diamètre, ou 1500 millim. de rayon, Teneriffe aurait un millim. (au tableau, on ne peut le voir: le trait qui figure la sphère a plus de un millim. d'épaisseur).

Li9. Quant à la profondeur des mers, encore bien qu'on ne puisse pas sonder en beaucoup d'endroits, il est très-probable que l'abaissement moyen n'est pas d'une lieue. — Répression qui en résulte sur la sphère précédente. Si, avec un pinceau imbibé d'eau, on venait à imbiber cette sphère, on aurait relativement une épaisseur plus grande.

5^e. Leçon.

50. Comme nous ne nous occupons De la Terre que préalablement, et pour acquies les connaissances nécessaires à l'étude Des astres, nous la supposons sphérique.

51. Centre et Rayon De la Terre. —



Soit en O un observateur. Traçons son Rayon. Ce Rayon prolongé vers le ciel prend le nom De Verticale. — La situation De cette Verticale en un lieu De la Terre, s'obtient pour un fil à plomb: pour déterminer plus rapidement les oscillations, on fait plonger la maine Dans un liquide.

Si par la verticale Du lieu De l'observateur, on fait passer un plan, ce plan est perpendiculaire à la surface De la Terre et est appelé un Vertical. il y a une infinité De plans Verticaux passant par un même point De la Terre.

Si l'on suppose que cette verticale soit prolongée ... Zénith, Nadir.

52. La Terre étant sphérique, toute section plane est une circonférence: et si le plan passe par le centre, on a un Grand Cercle.

Comme toutes les circonférences, nous divisons les Grands Cercles en Deux ... 360°. — Quadrant. — Minutes — Secondes.

$$\begin{array}{lcl} 5400' = 1 \text{ quadrant} & & 21600' = 2\pi \\ 324000'' = \text{id.} & & 1296000'' = 2\pi \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{lcl} 5400' = 1 \text{ quadrant} \\ 324000'' = \text{id.} \end{array}} \right\} \pi = 648000''$$

Si nous supposons que ce grand cercle se relève en restant perpendiculaire à lui-même, nous aurons une série De petits cercles décroissants. — Plan Tangent Il est perp. à l'extrémité Du Rayon CO: ce que l'on exprime en disant que le plan Tangent à la surface Terrestre est perp. à la Verticale.

le plan Tangent est dit Horizontal.

De même que nous avons fixé la position De la Verticale au moyen Du fil à plomb, De même nous déterminerons celle Du plan horizontal par des niveaux, ou pour une portion peu étendue De la surface Des Eaux tranquilles.

Souvent nous aurons besoin D'un plan horizontal qui réfléchisse la lumière. on se sert alors D'un bain De Hg Dans une cuvette plate afin qu'elle en contienne moins (chute naïf): la cuvette doit être assez large pour qu'il n'y ait plus D'effets capillaires.

on peut aussi se servir du fil à plomb et de procédés géométriques pour déterminer un plan horizontal: De même que le bain de mercure peut servir à fixer géométriquement la verticale.

Ces deux moyens sont employés dans la recherche des Longitudes, et conduisent au même résultat.

Le plan horizontal s'appelle souvent Horizon. Le sens vulgaire de ce mot est ainsi un peu détourné, ainsi qu'il a été celui du mot Géométrie. Nous en réservons la détermination à la terre considérée comme sphérique.

Maintenant, occupons-nous un peu de son Enveloppe, qui influe sur les observations astronomiques.

atmosphère.



53. Lorsqu'on s'élève dans l'atmosphère, la difficulté de la respiration, d'accord avec le Baromètre, montre que la quantité d'air diminue.

Rappelons le principe du Baromètre: Si le tube a 1 centim. de section: si l'on considère un autre tube T de même section, plein d'air, et prolongé indéfiniment: le poids de l'air = le poids du mercure; et ce n'est par hasard qu'une si petite colonne de Hg pèse autant qu'une si grande colonne d'air.

Si maintenant on s'élève: ... la colonne d'air du tube T, qui peut être supposée fixe, diminue de tout la quantité dont on monte; donc ... Si par ex. on s'élève à 1000 pieds, le mercure baisse de $\frac{1}{30}$ de sa hauteur, un peu plus d'1 pouce. - à 10400 pieds (Etna, Ténériffe), le Hg n'est plus qu'à $\frac{2}{3}$ de sa première hauteur, ou 21 pouces 3 lignes: enfin, à 18000 pieds ou 6000m, il est à 16 pouces:

0 pied	32 pouces
1000	31"
10400	21" 3 ^l .
18000	16"

En examinant ces nombres, on voit que la diminution n'est pas proportionnelle à la hauteur: - Plus on s'élève, plus il faut s'élancer ensuite pour avoir une même diminution. - Cette remarque montre qu'il ne faut pas croire qu'à 30000 pieds il n'y a plus d'air.

54. La question de la hauteur de l'atmosphère est loin d'être simple. - on est parvenu, soit par l'observation des Crépuscules, soit par celle des Réfract. - tions, soit par le calcul des densités successives, soit enfin par les lois de Refroidissement, - à cette conclusion que, à une distance de la terre égale à $\frac{1}{60}$ du rayon, il n'y a plus d'air.

Si donc une sphère de 1 pied de rayon nous représente la terre, $\frac{12 \text{ pouces}}{60} = \frac{1}{5}$ de p. serait l'épaisseur maximum de cette couche atmosphérique.

En réalité, cette épaisseur maximum est de 25 lignes. - Là, il n'y a plus autant d'air que le peu qui reste dans nos meilleures machines pneu-

matiques: aucun procédé de Chimie ou de Physique ne pourrait en donner quelques traces.

55 Tout cela complète nos Connaissances, mais complique nos observations. Nous pouvons. En effet nous représenter l'atmosphère par une série de Couches Sphériques d'air de même densité, chaque couche ayant par ex. 1^m ou 2^m d'épaisseur: seulement les densités de ces diverses couches doivent être regardées comme décroissantes. — Ceci est justifié: car on a remarqué qu'au Nord de la mer, dans tous les lieux, le baromètre marque la même pression: et qu'il en est de même pour tous les points situés à une même hauteur au-dessus du niveau de la mer. — Figure? —

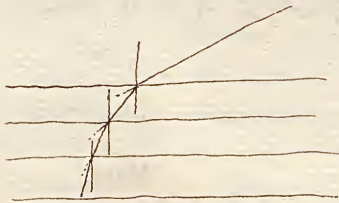
Il s'agit, entre ces diverses couches, une limite bien tranchée, ou bien si la densité décroît insensiblement? C'est évident: ce dernier cas.

Enfin, la densité décroît-elle jusqu'à zéro, ou bien seulement jusqu'à une certaine valeur qui forme une limite brusque? Peu nous importe, car les phénomènes sont les mêmes dans les deux cas. — Il est cependant probable que ce second cas est nettement limité comme le premier.

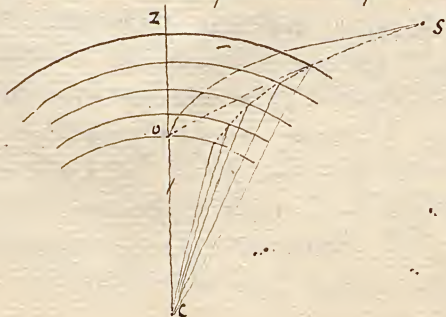
Si l'on se rappelle maintenant les propriétés de la lumière, il est facile de voir que les astres nous paraîtront toujours plus élevés qu'ils ne le sont réellement.

(Rappelons la propriété fondamentale de la Réfraction: air et eau. — Un observateur voit toujours voir un objet dans la direction du Rayon ou la lumière qui lui arrivent? Rien ne peut prouver qu'il y a eu déviation, des points sont plus bas qu'ils ne le paraissent quand on les regarde obliquement. Ceux qui ont été dessus savent bien qu'ils font paraître en-dessous.)

Si nous avons deux couches d'air de densités différentes, le phénomène sera le même. En passant de milieu de moins dense dans l'autre, le rayon lumineux se rapprochera de la verticale. Prenons 3 ou 4 couches de plus en plus denses: nous aurons:



Si les couches deviennent de plus en plus minces, nous aurons une courbe continue. appliquons cela à la surface de la Terre. Soit C son Centre, O un observateur, Z son Zénith. Considérons l'atmosphère comme composée d'une série de couches de plus en plus légères et peu épaisses. — Soit S une étoile. — Le rayon qui se dirigerait vers l'observateur paraîtrait-il pour son œil? non, évidemment.



Conséquence : les Rayons qui arrivent à l'œil sont donc des Rayons qui n'étaient pas primitivement dirigés vers l'observateur, mais qui, en partant de S, ont pris une route oblique, plus élevée.

Suivant quelle direction le Rayon paraît-il à l'observateur ? Rappelons-nous ce qui a été dit : l'observat. n'a que la conscience de l'Impression, et ne peut juger de ce qui arrive immédiatement au Rayon lumineux. Il verra donc les astres plus rapprochés du Zénith, dans la direction de la tangente au dernier Élément de la Courbe.

(Impossible de dire que les Sinusmens de la fig. sont substitués, et que la Différence de Direction est bien moindre)

56. Voyons maintenant l'influence de cette Cause d'Erreur.

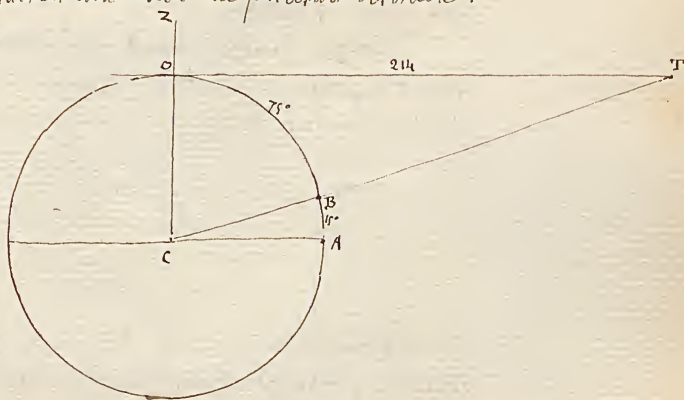
Def. Distance Zénithale angulaire d'un astre : - vraie et apparente.

La Distance Zénithale apparente est plus petite que la vraie.

Mais de combien ?

C'est là un problème difficile, et dont la solution réclame la connaissance précise de la constitution de l'atmosphère, avec toutes les ressources du Calcul. - c'est une matière à problèmes qui n'est pas encore épuisée.

Sans donner de l'Algèbre, voici une construction qui, pour toutes les hauteurs, donnera la Réfraction avec toute la précision désirable :



Soit O l'observateur, Z son Zénith. Menons la tangente OT jusqu'à la rencontre T avec le rayon CB tel que $AB = 15^\circ$. - Je divise OT en 214 parties égales, de O à T : si l'on s'arrange de façon que $OT = 214''$ la division se fera tout de suite. - Pour savoir, quand on observe un astre, de combien de secondes il est trop près du Zénith, on le lit au B sa distance Zénithale au bout du rayon qui la représenterait, prolongé jusqu'en OT : si on lit 25, c'est qu'il faut augmenter la Dist. Zén. de $25''$.

Cette construction est exacte jusqu'à 75° . - au-delà, le problème devient effrayant de complication. - Quand on approche de l'horizon, la loi n'est plus du tout applicable.

à 45° , répond une correction de $59''$, presque une minute. or, une minute en astronomie, c'est un monstre (!!): les astronomes se disputent pour des secondes.

à 75° , la correction est de $214''$.

au Zénith, zéro. à 90° , elle est de $33', 46''$

57. Voilà une conséquence importante Relative au lever et au coucher des astres : ils paraissent relevés : - on les voit encore quand ils sont déjà au-dessous de l'horizon.

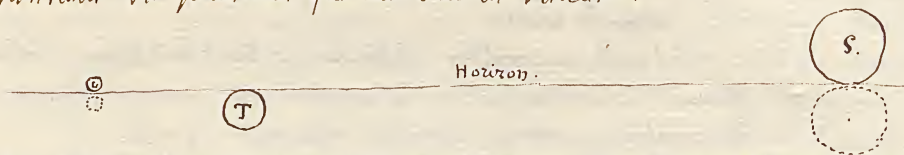
Cela s'applique au Soleil comme aux étoiles ; comme, à l'horizon, la

Réfraction est de $33' 26''$, et que le Diamètre apparent Du Soleil n'atteint jamais $33'$, son Disque est déjà Descendu en-dessous De l'Horizon, alors que son bord inférieur nous paraît lui être Tangent. — Il en est De même pour la Lune.

L'univers a lieu pour le lever Des astres.

Le phénomène Des Réfractions allonge Dans la Durée Du jour, car les Deux causes s'ajoutent.

58. on trouve aussi là l'explication D'un phénomène Curieux: — Les éclipses De Lune ont lieu lorsque la Terre se trouve entre la Lune et le Soleil. Cependant, quelquefois on observe une éclipse De Lune lorsque le Soleil est sur le point De se coucher, la Lune étant totalement levée. Or ces deux positions, marquées en trait plein sur la figure, ne sont qu'apparentes; ce sont les positions des pointillés qui ont lieu en réalité:

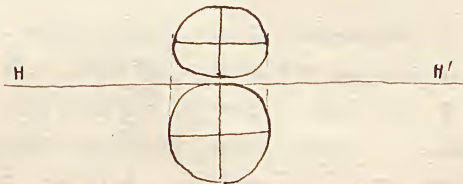


59. La réfraction produit encore, Dans les apparences Du Soleil et De la Lune, une autre Illusion.

Lorsque le Soleil vient De se lever ou est sur le point De se coucher, il paraît aplati, surtout à la partie inférieure. — Cela est facile à expliquer si l'on consulte la Table Des Réfractions: la Réfraction est:

pour le bord inférieur	— $33' 26''$
" " Supérieur	$28' 14''$
Différence	$5' 32''$

La différence est $\frac{1}{6}$ De la Réfraction Totale: Donc le diamètre vertical Du Soleil ne paraîtra plus que de $26' \frac{1}{2}$:



au contraire, le diamètre Horizontal rest Constant. — Donc....

60. La présence De l'atmosphère, si elle allonge la Durée Du jour par Réfraction, l'allonge bien Davantage encore par Réflexion.

Le premier allongement n'est que De quelques minutes, le second est De plusieurs heures.

Pour s'en rendre compte, il faut remarquer qu'un Centre Lumineux n'éclaire pas seulement les corps qui sont juste en face De lui. — Cela tient à ce que, sur les objets qui reçoivent directement les rayons, une réflexion partielle a lieu, et la lumière qui en provient éclaire D'autres objets, sur lesquels une nouvelle réflexion se produit. — Si l'on est entouré De murailles blanches, on y voit Davantage: si elles sont noires, il n'arrive presque plus De lumière.

La lumière se réfléchit donc fréquemment sur les molécules D'air, et

à cette hauteur, l'air est tellement dense que sa présence ne peut plus être manifestée par le phénomène du crépuscule de l'aurore.

Nous en faisons la De ces notions générales, et nous allons étudier d'abord les phénomènes célestes. — La Terre sera supposée sphérique.

61. La Terre, avons-nous déjà dit, tourne sur elle-même autour d'un De ses diamètres PP' , et cette rotation s'effectue de la manière suivante : — Si un observateur se place le long de cet axe de façon qu'il soit le pôle Arctique au-dessus de sa tête, la Terre va de la droite à la gauche.

Si cet axe, idéal, mais parfaitement déterminé, est mené dans la Terre, ses points d'intersection avec la surface terrestre s'appellent Pôles. — L'un est le Pôle arctique, Nord ou Boréal, l'autre...

Mais à présent, disons quelle ligne des pôles dans la Terre est parfaitement fixe ainsi, dans ce moment, le pôle N. est en un certain point des mers Boréales; et bien, ce point ne varie jamais de 10 m. comme on le démontre par l'observation de la surface de la Terre.

Il pourrait pu arriver que la Terre tournât successivement autour de ses différents diamètres : celui de Paris, celui de Londres, etc. (Céleste Géologie qui s'appuient sur cette hypothèse que la rotation autour de différents axes a eu lieu : elles sont toutes gratuites, et rien ne vient à l'appui.)

Equateur. — Petits cercles. —

62. Voyons si cette rotation de la Terre explique bien tous les phénomènes que nous voyons.

Soient des étoiles dans le ciel, et un observateur placé au centre de la Terre, ayant la faculté de se tourner de tous les côtés, et de tout voir autour de lui. Alors, il verrait tourner les étoiles, qui lui paraîtraient immobiles les unes par rapport aux autres : car, les déplacements relatifs des étoiles étant très-lents à se produire, c'est un phénomène subéquent dont nous faisons provisoirement abstraction.

De plus, dans l'impossibilité où il se trouve de juger des distances, il sera naturellement conduit à supposer toutes les étoiles également éloignées. C'est de là qu'est venue l'idée de la sphère céleste des anciens, d'après la propriété de la sphère par rapport à son centre. — Voici comment on conçoit cette sphère. — on la suppose d'un rayon énorme, embrassant toutes les étoiles, et ayant l'observateur pour centre. Pour cet observateur immobile, pour avoir la position d'une étoile sur la sphère, il n'y a qu'à joindre l'étoile à son œil, et à prendre l'intersection du rayon avec la sphère.

Cette sphère, dans la plupart des cas, n'est qu'une abstraction de la réalité : car l'observateur ne voit que les directions et les distances angulaires, éléments qui sont conservés sur la sphère idéale dont nous venons de parler. ainsi, quand nous aurons rapporté 3 étoiles sur cette sphère, nous aurons tous les éléments que nous pourrions considérer dans les positions relatives des astres.

C'est ainsi qu'en continuant cette projection des astres sur cette sphère idéale, nous aurons le spectacle du ciel sur une carte sphérique.

63. Représentons maintenant notre Terre telle qu'elle est, et supposons notre observateur

place Venus, et non dans le Vile comme l'aut. à l'heure.

Si la Terre est immobile et ne tourne pas, le Spectacle sera le même pour lui, à cette exception près que la Terre lui en cachera une partie.

Si donc la Terre restait fixe, nous ne connaîtrions qu'une partie des astres, et, pour les Voir tous, nous serions obligés d'entreprendre un Voyage. à mesure que nous cheminerions, nous découvririons de nouvelles Etoiles, et nous laisserions derrière nous les anciens. - C'est la même chose que si l'on se trouve à demi. csp. min d'une montagne élevée: il faut en faire le tour pour voir tout le pays environnant.

La Rotation De la Terre nous Evite ce Voyage, et les choses se passent de même, à cette différence près que l'observateur, au lieu d'avoir besoin de plusieurs années pour prendre connaissance Des phénomènes célestes, les voit tous en quelques heures.

Établissons donc la Rotation De la Terre. - Supposons que l'observateur soit immobile à l'Équateur. - Explications et Détails. -

Phénomènes analogues à Dans nos climats:

Si c'est à 8 h. vous regarderez le ciel, --- telles et telles Etoiles: telles autres s'éleveront à telle heure. - etc.

Les Etoiles paraissent De gauche à droite.

Comme en général on est assez porté à tout rapprocher à soi, on croit que ce sont les Etoiles qui se déplacent: dans un bateau qui marche sans secours, on croit que la Terre marche:

...aufugimus portu, Terraeque urbesque recedunt.

Ce n'est qu'une apparence:

Placez-vous au N. d'un Edifice, tournez-vous vers le sud, regardez une étoile, de façon que l'Edif. soit entre elle et vous. Saisissez le moment où elle disparaît derrière la voûte de l'arche de l'Edifice, en marchant dans une Pens: marchez en sens contraire, elle disparaîtra.



6. Leçon.

64. Le mouvement De Rotation De la Terre autour De son axe, l'astronomie historique prouve qu'il n'a pas varié. - La durée De la Rotation n'a pas changé non plus :

Comment a-t-on pu le reconnaître ?

Nous pourrions bien, à l'aide D'une bonne pendule, voir si, pendant plusieurs jours, le mouvement De Rotation est le même. - Mais il est impossible De le constater ainsi pendant Des siècles. - Mais la Lune est une horloge Éternelle qui nous servira à cette constatation. - Nous en reparlerons plus tard.

Horloges. - Lunettes.

65. Pour fixer les directions avec une grande précision, on se sert De Lunettes. Les anciens se servaient D'alidades. - Pinnules. -

Mais les trous sont beaucoup trop grands pour que l'observation soit précise. - En outre, avec les yeux, on ne peut pas distinguer l'une De l'autre Deux directions qui font un angle De quelques minutes.

C'est l'emploi Des Lunettes.

Objectif. - Propriétés Des Lentilles. - achromatisme. Newton le crut impossible. Euler le crut possible, mais se trompa Dans ses Calculs. Dollond fit Des verres achromatiques. -

on sait De plus qu'en aidant la vue D'un microscope, on peut Étudier plus facilement les petits objets. or, avec un simple verre bi-convexe, on a un microscope : - le microscope Des naturalistes est une simple goutte D'eau.

Rien n'empêche Donc D'observer l'image Des objets avec un microscope oculaire.

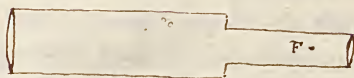
ainsi, Dans la lunette astronomique, l'objectif a pour but D'approcher De nous Des objets situés à l'Infini, et avec l'oculaire, on examine l'image. Sans l'oculaire, on ne gagnerait rien : on aurait la même chose que Dans une chambre noire. - Néanmoins, les passages De Vénus et De Mercure sur le Soleil ont été observés sans oculaire. on faisait tomber les Rayons Solaires sur un écran Dans une chambre obscure. Le premier passage De Mercure observé fut ainsi, en 1631, par Cassendi, au Collège De France : on voyait un petit point noir traverser lentement le disque Du Soleil.

Plus l'objectif est grand, plus il reçoit De rayons lumineux, et plus on peut amplifier l'image avec une loupe sans que les détails cessent D'être perceptibles, pour D'être éclairés.

La lunette astronomique renverse les objets. avec D'autres verres, on pourrait les redresser, mais on s'en garde bien. on y arriverait avec l'aide De la quantité De lumière, et c'est cette lumière qu'il faut conserver avec Soins. - L'image est une renversée, mais avec un peu D'habitude, on s'y reconnaît : l'important est De bien voir et De bien pouvoir fixer les

position d'une ligne.

Lorsqu'on dirige vers le ciel une semblable Lunette, pourvue d'un



objectif et d'un oculaire, dont le foyer commun est en F , on n'aperçoit pas seulement un point, mais un certain espace du ciel, espace qui diminue à mesure que le grossissement augmente. - Champs.

Si la lunette est fixe et dirigée vers le sud, on voit les étoiles y apparaître vers la droite et disparaître à gauche. Cependant, tel n'est pas le sens de leur mouvement : mais les lunettes renversent. - Histoire d'un jeune homme qui prétendait voir les satellites de Jupiter à l'anne binaire : on s'aperçut qu'il blaguait (sic), et qu'il avait appris leur position dans la connaissance des Temps : car, dans l'explication de ce qu'il prétendait voir, il parlait de ce qu'on apercevrait dans une lunette : il oubliait qu'elle renverse. -

Pour fixer la position d'une étoile dans le champ d'une lunette, on foyer commun de l'objectif et de l'oculaire on tend deux fils très-fins, (souvent, des fils d'araignée, maintenant, des fils de platine). Ces deux fils apparaissent en noir sur le fond du ciel qui est blanc : et leur point de croisement détermine l'axe de la lunette : parce que c'est un point fixe qu'on peut toujours retrouver à volonté. De sorte que, si une étoile y passe aujourd'hui, elle y repassera demain, et nous sommes sûrs qu'alors sera l'étoile sera. Rigoureusement, dans la même position que la veille, pourvu que la lunette n'ait pas tremblé. - avec des lunettes parfaitement établies, on est sûr, au bout d'un mois, au bout de 6 mois, de pouvoir retrouver la même direction, à moins de 5" d'arc.

Les deux fils ne sont bien clairs que si le réticule est au foyer de l'oculaire : ils ne sont invariables que si il est au foyer de l'objectif. - on voit donc ainsi que ces deux foyers doivent coïncider.

66. Un autre instrument indispensable pour observer, c'est une Horloge.

Clepsydre des anciens : c'était pour mesurer le temps pendant lequel parlaient les Avocats. - on peut arriver par l'écoulement du mercure à diviser avec une grande précision un petit intervalle de Temps.

Nous ne décrivons les montres et Chronomètres qu'à l'occasion du problème des Longitudes.

C'est le Pendule qui est la source de toute précision en Astronomie pour la mesure du Temps.

Galilée observa que :

Si les oscillations du pendule ne sont pas très-étendues, peu importe pour leur durée que l'amplitude change un peu.

Cette remarque est importante : car la résistance de l'air ne permet pas au pendule de garder toujours la même amplitude d'oscillation. - Si donc le pendule peut être employé pour mesurer le Temps. Car, si pour 12 oscillations il faut un certain Temps, pour 24 il faudra un Temps double, pour 36, un temps triple, etc. Donc

La durée d'un phénomène quelconque est proportionnelle au nombre des oscilla-

-tions d'un même pendule effectuées pendant son accomplissement.

Balancier. - Sa description. - Masse lenticulaire que l'on suspend en un point tel de la verge que... cette masse doit être considérable pour l'écart de la verge, pour la rapprocher le plus possible du pendule idéal. - Pourquoi cette forme lenticulaire? Pour mieux fendre l'air. - Une vis est à l'extrémité de façon que l'on puisse remonter plus ou moins la dentelle.

Une demi-oscillation se passe en 1^{re} de temps.

Compensation à Gille. - Mauvaise.

Quelques mots seulement sur les pièces qui accompagnent le Balancier dans les horloges:

Alabard: Suspension à Couteau.

Enfin: Si l'on pouvait avoir, dans le vide, un pendule idéal, il marcherait indéfiniment. Mais il n'en est pas de même pour les pendules ordinaires: il y a des frottements qui finissent par éteindre les oscillations du pendule le mieux disposé.

Or, l'inconvénient qu'on aurait à ne pouvoir ainsi mesurer le temps que la ou 5 heures, il y en aurait un autre: la découverte de Galilée n'est qu'approchée: pour dire la vérité, il faut s'en tenir ainsi: Pour de petites différences d'amplitude, il y a de bien plus petites différences de durée. Mais, si l'on arrive à de grandes différences d'amplitude, les différences de durée, bien que plus petites, ne sont pas négligeables.

Il faut donc combiner la découverte de Galilée avec un mécanisme qui restitue au pendule une partie de la vitesse qu'il perd, et si alors les oscillations ont même amplitude, leur durée sera rigoureusement constante. ancre. - Escapement. - Rouages. -

67. Comment se servir de ces instruments pour constater que la durée de la rotation de la sphère céleste reste constante?

Si, un soir, vous dirigez une lunette vers une étoile de manière qu'elle disparaisse derrière le point de croisement: fixez votre lunette, et laissez-la. Le lendemain, à la même heure, venez regarder. Vous ne tarderez pas à voir l'étoile entrer par la droite et passer au point de croisement. Ce retour se fait exactement prouvé que la réfraction n'ait pas changé: plus la température est élevée, plus la réfraction est petite: plus le baromètre est haut, plus elle est grande: de façon que pour une même hauteur barométrique, la réfraction n'est pas variable: elle n'est que si la température et la hauteur barométrique restent constantes. - Deux jours, trois jours... après, vous retrouverez votre étoile à la même place: ce qui montre que l'axe de rotation de la sphère n'a pas changé de position.

De plus, supposons que la pendule marque, au moment du passage, les heures suivantes

1 ^{er} jour	7 ^h	4 ^m	15 ^s ,2
2 ^e "	7 ^h	4 ^m	15 ^s ,6
3 ^e "	7 ^h	4 ^m	16"

on voit que

$$1^{\text{re}} \text{ Différence} = 2^{\text{e}} \text{ Différence} = 24^{\text{h}} 0^{\text{m}} 0^{\text{s}},4.$$

Cela a lieu pour toutes les Étoiles, et Rigoureusement?

Conséquence:

Le mouvement de la Sphère Céleste est Régulier et Uniforme.

68. Cet Intervalle de temps qui s'écoule entre deux Révolutions Consécutives d'une Étoile au même point du Ciel porte le nom de Jour Sideral. — Heures, minutes et Secondes Siderales.

Si une horloge est réglée sur les Étoiles, elle doit pourvoir 24^h. en un jour sideral. — La précédente avance de 0^h,4. Pour la régler, on allonge le pendule. Mais, dans les observations, quand on a une pendule qui n'avance que de 0^h,4, on se garde bien d'y toucher; car le plus petit mouvement la ferait retarder d'une ou deux secondes. — Dans la vie civile, une avance de 0^h,4 importe peu; dans les observations, on préfère corriger les observations, car on ne peut négliger ces petites différences.

69. Lors donc qu'on est sur, au point de vue Philosophique, de l'uniformité du mouvement de la Terre, on renverse le problème, et l'on se sert des Étoiles pour régler la pendule.

Voici comment on opère.

on observe plusieurs jours de suite le passage d'une même Étoile à la croisée des fils, et, à ce moment précis, on note l'heure. — Si, pour le jour, on a les différences suivantes:

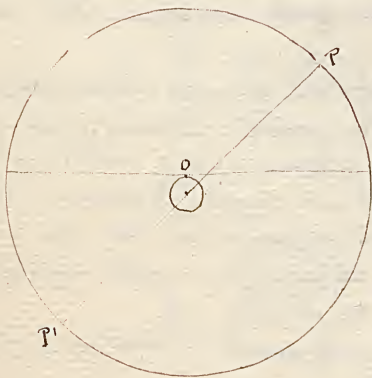
24 ^h	0 ^m	0 ^s ,4
24 ^h	0 ^m	2,6
24	0	0,1

la pendule serait à régler; elle ne marcherait pas uniformément.

Mais lorsqu'on en a une dont la marche est uniforme, on la règle facilement au moyen d'une bonne horloge, on peut répondre de 0^h,01 de temps.

aspect du Ciel à Paris.

70.



Tracé de Globe Terrestre. Soit Paris en O. Si je mène le Plan Tangent, j'ai l'horizon. autour de quelle ligne tourne la Terre? — L'axe de Rotation est tellement placé que Paris est entre le Pôle et l'Equateur, à peu près au milieu. La Terre, pour un observateur placé dans la position Noroît, tourne de Droite à Gauche; donc le ciel semble tourner de Gauche à Droite. — Comme il s'agit des apparences, supposons que ce soit la Sphère Céleste qui tourne autour de P-P'. — Pôles Célestes. — Quelle est la 1^{re} conséquence? C'est que P (Nord, Boréal, arctique) doit paraître immobile; de même P' (Sud, austral, antarctique). au contraire, les Étoiles qui ne sont pas situées au Pôle paraissent décrire des cercles. — Les circonférences sont d'autant plus petites qu'elles sont plus rapprochées du pôle. — Une Étoile de l'Equateur décrit le plus grand cercle. — Toutes ces circ. sont décrites en 24 h.

71. Voici le spectacle que nous aurions si la Sphère était transparente. Mais, comme il n'en est rien, les apparences sont différentes. — P est propre-

-réellement visible: P', toujours visible: ce n'est qu'en dépassant l'Équateur qu'on peut voir P'.

Toutes les étoiles qui descendent des cercles aux pôles pour ne pas s'abaisser au-dessous de l'horizon sont toujours visibles: Cercle de perpétuelle apparition.

Toutes les étoiles qui sont si près du pôle austral, et avec près pour ne pas atteindre l'horizon sont invisibles: Cercle de perpétuelle occultation.

on ne peut connaître ces étoiles que par des Voyages.

Un des premiers astronomes qui firent ces Voyages fut Halley, un des amis de Newton. En 1677, il alla observer à St. Hélène. - En 1751-1753, Lacaille alla au cap de Bonne-Espérance, et y dressa le catalogue de 10000 étoiles.

Herschell alla aussi au même endroit.

Il y a là un magnifique observatoire, qui va être muni d'instruments supérieurs à ceux que l'on possède, et avec lesquels on va explorer les richesses du ciel austral.

Les étoiles qui ne sont pas dans le cercle de perpétuelle occultation, mais très-près, ne sont visibles que peu d'heures: telles sont Poméranie et les étoiles du Scorpion.

Divers aspects des autres étoiles.

Les étoiles équatoriales sont visibles presque pendant 12 h. - Plus tard, nous apprendrons à calculer leur lever et coucher.

72. Indiquons ce qu'il y a à faire pour vérifier cela expérimentalement.

on regarde l'endroit du ciel où le soleil se trouve à Midi. - ou à le Sud. - on se retourne. - Voulez-vous avoir le pôle? Il faut chercher la constellation de la Grande Ourse qui est toujours sur l'horizon, et toujours visible quand il fait nuit. - Grande ourse. - Pôle. - Petite ourse. -

Pour continuer les observations des étoiles pendant le jour, il faut se servir de lunettes avec puissances: même alors, on les voit mieux que la nuit, plus nettement: les observations de jour valent mieux que celles de nuit. C'est une chose très délicate de savoir pourquoi l'on voit si bien les étoiles dans les lunettes. - on les voit aussi dans les puits de mine, et même avec des lunettes plus étroites. Un opticien célèbre me contait qu'il avait été conduit à ces études par ce fait qu'en se chauffant en hiver, il voyait toujours à la même place du jour pour une même étoile au-dessus de la cheminée.

73. Le mouvement de la Terre, qui semblerait être un désavantage pour l'astronomie, tourne au contraire à son profit. Il nous permet de faire des opérations impossibles sans cela: - ainsi, c'est ce mouvement de translation qui nous a permis de trouver une limite inférieure de la distance des étoiles à la terre: en-deçà, il n'y en a pas, bien sûr.

Construction connue pour trouver la distance d'un objet inaccessible. Emploi de la trigonométrie pour plus d'exactitude.

Quand les objets sont très éloignés, quelles seront les conséquences de cette construction?

Ex. - Siarc d'une seconde = le Rayon: 206265.

ainsi, lorsqu'on observe un objet sphérique sous un angle de 1", il est à une distance 206265 fois plus grande que ses dimensions. ainsi, voici une sphère de 1^m. de diam. de combien faudrait-il s'en éloigner pour la voir sous un angle de 1"? 206265 m. = 81 lieues!! - Pour savoir sous un

sans un angle de $0''$, il faudrait se placer encore 100 fois plus loin. - ainsi la mesure des angles quand on connaîtra les dimensions de l'objet pourra servir à mesurer une distance.

Imaginons maintenant un observateur placé à l'Equateur. Il aperçoit une étoile en S. S'il ne s'agit point de position, il la verrait toujours à la même place: il saurait bien la direction, mais il ne pourrait avoir aucune notion sur la distance.

Mais la Terre tourne: l'observateur va venir de A en B. - Il peut alors considérer le diam. de la Terre comme une base de longueur connue.



On ne suppose pas qu'il mesure les angles A et B, qui sont les suppléments des distances linéaires. On a $S = 180 - (A+B)$.

Supposons un instant qu'on ait:

$$A = 88^{\circ} \ 59' \ 28''$$

$$B = 91^{\circ} \ 0' \ 33''$$

$$A+B = 179^{\circ} \ 59' \ 59''$$

Donc

$$S = 1''$$

La distance serait 2×206265 fois le rayon de la Terre, qui est 1900 lieues: on a 206265×3900 lieues.

Or, en faisant l'opération, on trouve $S=0$ avec toute la précision possible. - Donc la distance est beaucoup plus grande. - Et pourtant, si l'on avait seulement $S=0''$, on le constaterait. - ainsi, une limite inférieure de la distance est

$$3900 \times 206265 \times 10 \text{ lieues.}$$

on peut l'exprimer autrement et mieux. - Quand nous ferons la même opération pour le soleil, nous trouverons que l'angle sous lequel le soleil voit la Terre est $17''$, 2 ou 172 fois $0''$, 1. Donc les étoiles sont au moins 172 fois plus éloignées que le soleil. - Le résultat, qui nous paraît si considérable, est de beaucoup inférieur à la réalité.

73. La Terre est donc une sphère enveloppée d'une sphère céleste B.ale que l'on forme en projetant de nos lieux les étoiles. - Mais il faut définir d'une manière très-nette la position des étoiles sur cette sphère. - Les propriétés de la géographie sont liées essentiellement à ceux de l'astronomie: en sorte que, pour bien définir la position d'un lieu, il faut connaître parfaitement celle des étoiles.

Méridien d'un point, de Paris par ex.

Latitude. - Celle de Paris = $48^{\circ} \ 50' \ 14''$. - latitude boréale et australe.

Ex: $L = +30^{\circ}$, $= -30^{\circ}$.

Situation de 2 lieux l'un par rapport à l'autre:

$$\text{Long. de St. Pétersb.} = 27^{\circ} \ 58' \ 30''$$

$$\text{Lat.} = 59^{\circ} \ 56' \ 23''$$

avec ces données, on peut construire les deux villes sur un globe.

Globes Célestes.

Sur les cartes, on fait de même; mais il y a de plus un problème de perspective.

7^e. Leçon.

74. Tout ce que nous venons de dire de la sphère terrestre, nous pouvons le répéter pour la sphère céleste.

Si par l'axe de la sphère céleste on fait passer un plan, il la coupe suivant un méridien céleste.

Le plan de l'équateur céleste est le même que celui de l'Eq. terrestre.

Ascension droite et déclinaison.

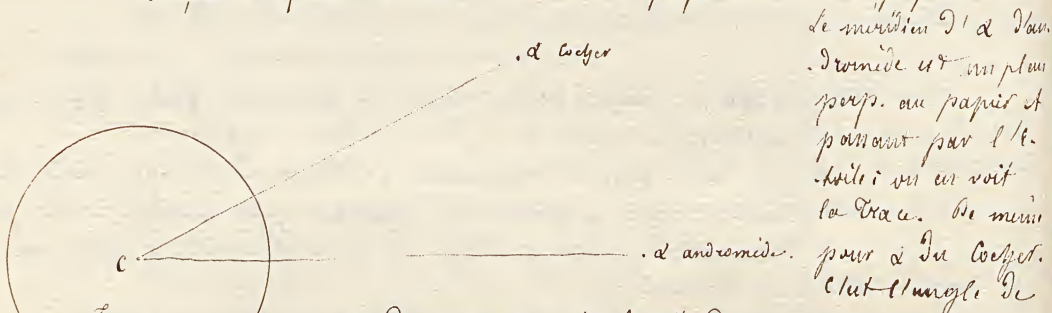
Les deux coordonnées déterminent la position des astres. — On peut construire une sphère céleste comme une sphère terrestre. — Observez, si l'on veut faire des cartes, cela revient à une question de géométrie.

75. Comment déterminer l'angle des méridiens de deux étoiles?

On peut se servir pour cela du mouvement de rotation de la terre et des horloges.

Choisissons α d'Andromède, et γ du Cocher ou la chèvre.

Tracons l'équateur terrestre: son axe est perpendiculaire au papier.



Les deux lignes qu'il s'agit de mesurer.

Le plan du méridien d'un observateur vient successivement coïncider avec ceux de toutes les étoiles.

Remarque donc que, puisque la terre tourne en 24^h.

rien n'est plus facile que de trouver l'angle cherché des deux méridiens de l'intervalle de temps qu'il a fallu pour que le plan du méridien terrestre prenne successivement les deux positions.

En 24^h. le méridien terrestre parcourt 360° .

En 1^h. $360^\circ : 24$ ou 15°

1^m. $15^\circ : 60$ ou $15'$

1^s. $15' : 60$ ou $15''$

Si l'intervalle de temps est

5^h. 3^m 7^s

l'angle est donc

$75^\circ 46' 45''$

Ce procédé suppose que l'on puisse déterminer avec précision deux choses: 1^o. l'inst. tant P. que du le passage à l'Eq; 2^o. l'heure indiquée pour la pendule à cet inst. — Lunette méridienne, due à Roemer.

Comme il est aussi exact de donner le temps que les angles, on ne le donne pas la peine de transformer en degrés, mais on donne les résultats en heures, minutes et secondes de temps. — voici un extrait des Registres de M. de la Hire:

année 1800 — août, 7.

d'Andromède	—	23 ^h	58 ^m	33 ^s , 74
Chèvre		5	2	24, 63
Sirius		6	36	27, 70
Arcturus		14	7	1, 60
Antares		16	17	20, 04

en retranchant, on aura les Différences d'A en Temps.

D'après cela, on peut construire les méridiens de ces étoiles sur une carte ou sur un globe.

Ces observations ne sont pas affectées de la Réfraction.

Mais il y en a une autre, lorsque l'pendule avance ou retarde un peu. — Pour le voir, on prend les observations du 8 août; et l'on corrige convenablement les premières.

76. Détermination de la Réclinaison.

Au même lieu, nous déterminerons la Latitude de lieu de l'observation: car ces deux déterminations sont liées complètement l'une à l'autre.

L'instrument dont on se sert n'est autre chose qu'un grand cercle qu'on place dans le plan méridien. Il est divisé en degrés et fractions de degrés. On peut lire, avec des verriers et des microscopes, jusqu'aux secondes et fractions de secondes. Une lunette est mobile sur le cercle fixe (cercle mural).

Il y a deux problèmes à résoudre:

à quelle division correspond le vernier sur le limbe,

1°. Quand la lunette est verticale;

2°. Quand elle est dirigée vers le pôle.

1°. Pour déterminer le Zénith, que rien ne caractérise, on renverse la lunette, de manière à viser le Nadir: au dessous, on met une lunette à mercure. On a en général 2 images du Nécule, tant que la lunette n'est pas verticale. — à l'ord.

De vis, on les amène à se confondre. — Si l'on trouve qu'alors, la division du arc est 950°, c'est donc à 100° qu'aboutit la ligne de foi de la lunette lorsqu'on vise le Zénith.

2°. — Quant à la ligne des Pôles: Elle est située quelque part dans le méridien: c'est le quelque part qu'il faut déterminer. — Pour cela, prenons une étoile circumpolaire, à des deux passages, supérieur et inférieur, elle se trouve à égale distance du P^{ôle}. Si donc nous dirigeons la lunette vers l'étoile à son passage supérieur, puis à son pass. inf. et que nous prenions la moyenne, nous aurons la direction du pôle.

Ex.

Mai, 20 : Pass. Sup. de la Polaire 137°
inf. 140°

Direction de la ligne des pôles, aboutit à 138° ½

Zénith Equateur " 148° ½

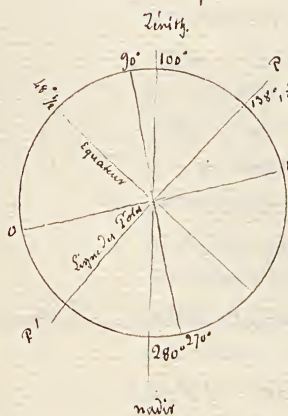
Distance du Zénith à l'Equateur = 100 - 48 ½ = 51 ½

Pi donc une étoile passe à 94° ½ sa Réclinaison est 46°.

Je pourrai maintenant avoir exactement la position des astres sur les cartes.

Ici, le phénomène de la Réfraction agit.

77. Dans les observations, si l'on rassemble tous les moyens de Contrôle possible, on emploie un autre procédé pour trouver le point du cercle mural auquel



correspond le Zenith: en déterminant avec une grande précision le point Del'horizon Du cercle. — Pour cela, lorsqu'on aperçoit une étoile dans la lunette, on fait aussitôt une autre observation De la manière suivante: on place Du côté Del'Étoile un Bassin De Mercure par lequel les Rayons Venant Del'Étoile Se réfléchissent. Si l'on déplace la lunette De façon à recevoir un Rayon réfléchi, il est facile De voir que la bissectrice Dell'angle Des deux positions De la lunette est pour l'Étoile. Si ces deux positions sont 180° et 90° , l'horizon sera à 190° et le Nad Zenith à 100° .

On peut déterminer l'autre bout Del'horizon avec De nouvelles Étoiles, ce qui fait 3 moyens Dont il ne faut négliger aucun, car le Zenith est un point capital.

78. Bessel qui a fait les observations Du Zenith et Del'horizon avec un grand soin à Königsberg a cru entrevoir De légers changements Dans la latitude. Mais il n'y a pas lieu De les regarder comme Réels: ce sont Des erreurs Instrumentales. Les mêmes observations faites à Greenwich n'ont pas Indiqué De variations: ainsi on a deux lieux Dont la latitude ne varie pas: on en conclut qu'il en est De même Dans tous les lieux De la Terre, et que la ligne Des pôles est fixe.

79. Reprenons les observations précédentes (faites à Greenwich).

20 Mai. Polaire. H. Inf. $140^\circ 0' 13", 4$
 Inf. $137^\circ 1' 2", 3$

Mais la Réfraction agit. — La Distance Zenithale Del'Étoile étant approximativement $40^\circ 0'$ et $37^\circ 1'$ les Réfractions sont $45", 1$ et $42", 5$.

Donc les véritables positions sont

H. Inf. $140^\circ 1' 1", 5$
 H. S. $137^\circ 1' 46", 8$

Dont la moyenne est la vraie position Du Pôle: — or la différence $2^\circ 59' 14", 7$

est le Diamètre Du petit Cercle D'écart par les Polaires: et $1^\circ 29' 37", 35$

est la Distance De la Polaire au pôle.

$137^\circ 1' 46", 8$
 + $1^\circ 29' 37", 35$

$138^\circ 31' 24", 15$

Il en résulte immédiatement la latitude Del'observatoire et la Déclinaison De l'Étoile.

Déclin. De la Polaire $66^\circ 30' 22", 65$
 Lat. De Greenwich $100 \quad 0 \quad 0$

$28 \quad 31 \quad 24, 15$

$51^\circ 28' 35", 85$

Il y a une erreur De $3''$ avec la vraie valeur $39''$ inscrite Dans les Tables. Tel est le procédé qu'il faut suivre quand on veut déterminer à loisir les latitudes et qu'on a Du Temps et Des Instruments à sa Disposition.

On peut avoir ainsi une confirmation Dell'existence Des Réfractionnels. Car si l'on recommence avec Des Étoiles De plus en plus Éloignées Du Pôle,

on trouve pour ainsi. Des positions De plus en plus Elevées: et qui s'élèveront les mêmes quand on fait les corrections.

80. Si maintenant une étoile n'est pas circumpolaire, et si l'on ne le voit qu'à son passage Supérieur, comment faire pour avoir sa déclinaison?

Observons le même jour, 20 Mai, le passage De la Chèvre. - Elle passe à la Division

$94^{\circ} 21' 44'', 8$
au Sud Du Zenith. - Mais la Réfraction est

$5'', 5$

Donc la lecture qu'on aurait dû faire est

$94^{\circ} 21' 39'', 3$

Il en résulte la situation D'éguauteur sur le Cercle mural

$48^{\circ} 31' 24'', 15$

et j'ai la déclinaison

$45^{\circ} 50' 15'', 15$

Sur les Tables Des étoiles, on trouve

$45^{\circ} 50' 16'', 2$

qui est la moyenne Des observations.

81. Je me suis placé Dans le cas où l'on dispose De Temps et De Grands Instruments. - Elle n'est pas la situation D'un navigateur ou D'un voyageur qui ont besoin D'opérer rapidement. - Pour les voyageurs, ils prennent Des cercles plus petits, et ont Des résultats moins précis. - Il est d'abord indispensable Définir la position Du Zenith. - C'est à peine: - Mais De Mercure: ou bien on peut prendre un miroir qu'on rend bien horizontal avec Des niveaux D'eau, mais c'est moins exact.

Cela fait, on observe la première étoile qui passe Dans le plan Du Cercle, la Chèvre par exemple. on trouve que sa distance Zenithale est 10° . on a sa déclinaison connue Dans les Grands observatoires. Donc

$$10^{\circ} + 45^{\circ} 50' = 55^{\circ} 50'$$

est la latitude Du lieu. - Et remarquons que l'observation D'une seule étoile suffit.

Passons au Navigation. - Ici, la question est plus délicate. on ne peut d'abord disposer un cercle à cause Du balancement Du navire. - On a inventé pour y remédier Des Instruments à réflexion, Destinés à trouver la distance angulaire De deux objets célestes. - Si l'on a, Dis-je, un cercle Dans le plan Des deux objets, qu'on vise le premier, et qu'on revient au second, on ne le retrouvera plus: le mouvement De la terre s'y oppose. Cela a lieu à terre. En mer, cela se compliquerait encore Du mouvement Du vaisseau. Néanmoins, on a vaincu la difficulté.

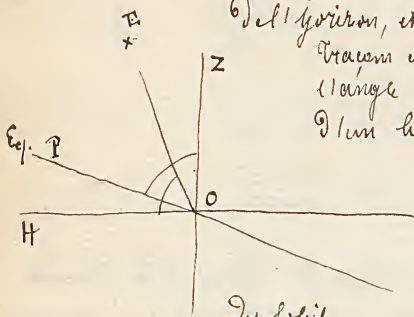
(voir la description Du Sextant à la fin De la Cosmographie De Briot.)

En mer, on ne fait pas usage De la mesure De la distance angulaire De deux étoiles: car ces distances sont les mêmes pour tous les points De la terre, cela n'apprendrait rien. - Mais on prend la lune, quand elle est visible: on vise une étoile directement, et l'on fait coïncider le bord De la lune avec Elle. - on ne peut mesurer la distance D'une étoile au centre Du soleil: car en mer, et avec Des lunettes imparfaites, on ne verrait pas les étoiles. - Si l'on voit en même temps le soleil et la lune, on mesure leur distance. (à quoi bon? plus tard sans doute, on le verra).

C'est pour la mesure De la hauteur Du Soleil au-dessus De l'Horizon qu'on détermine la latitude en mer. — on y arrive au moyen De la propriété que possède la mer De se comporter D'elle-même suivant une surface plane (sphérique ou plane): la limite De l'Horizon est alors nette. — on vise directement l'Horizon: puis on tourne le miroir mobile jusqu'à ce qu'il y ait coïncidence entre le Nord Du Soleil et l'Horizon. — l'opération se fait à midi. — avec Des Ephémérides, qui donnent les Déclinaisons Du Soleil, on pourra trouver la latitude.

Si l'on opère avec une Étoile, la nuit (mais alors on voit mal l'Horizon) il suffit d'avoir une Table Des Déclinaisons Des Étoiles.

Je dis maintenant que si l'on connaît la hauteur D'un astre au-dessus De l'Horizon, et sa Déclinaison, on pourra trouver la latitude Du lieu. Traçons en effet l'Horizon, la verticale et l'Équateur. E l'Étoile. on a l'angle FOH. on en conclut la Distance Zénithale. — Or la latitude D'un lieu est égale à la Distance De son Zénith à l'Équateur.



on a donc

$$\text{Latitude} = ZO = ZO + OF = ZO + \delta$$

D'où la latitude connue De l'Étoile.

La marche est la même quand on se sert De la lune au-dessus De l'Horizon.

avec quelle exactitude Un navigateur peut-il ainsi déterminer sa latitude? Sur la terre, une différence De latitude De 1" correspond à $\frac{4000}{1296000}$ lieues, ou $\frac{1}{144}$ de lieue. c'est à-peu-près 30". Par conséquent, si l'on obtenait la latitude à moins de 1", on aurait la position à moins de 30". — on ne l'obtient qu'à $\frac{1}{2}$ minute. Donc l'erreur est de 900" au plus. C'est là la limite sur laquelle on peut compter avec Des bons instruments.

Il faut tenir compte De la Réfraction.

Et aussi De la Dépression De l'Horizon: on a construit une Table de Dépression qui permet De la calculer. (Ann. Callet, à la fin).

L'histoire De nos dernières guerres offre un exemple De la grande précision à laquelle on peut arriver. Une Escadre De 5 vaisseaux De ligne Devait passer De l'Océan Dans la Méditerranée: il fallait traverser le Détroit De Gibraltar, où une flotte anglaise barrait la mer. — Il faisait nuit, et l'on se trouvait juste en face le Détroit, Dans l'alternative De donner contre les Récifs si l'on avançait, ou De se voir attaqué si l'on attendait le jour. — Les deux vaisseaux se mirent à calculer leur position, et, tous trouvant le même résultat, on se hâta à passer outre. — Les calculs étaient si exacts qu'on ne donna Dans aucun Récif, et qu'au lever Du Soleil, on était hors De vue: — cette flotte était la nôtre De l'Escadre Invisible.

Dans Des guerres plus éloignées, un marin, pour n'avoir pas connaissance De sa position, fut obligé De stationner longtemps, et eut la mort De son Equipage causée par le scorbut.

Des Longitudes.

81. Pour les Étoiles, la Détermination De l'Az est facile.

Pour les différents lieux De la terre, nous n'avons pas encore déterminé la longitude, et il est nécessaire que cette opération soit faite avec la plus grande précision. Pour le marin surtout, sans la longitude, la connaissance Des latitudes ne servirait guère.

82. Nous avons vu que l'aspect du ciel change quand on voyage sur un même méridien, et c'est là ce qui nous a permis de déterminer la latitude.

Il n'en est pas de même si l'on n'est sur un même parallèle, celui de Paris par exemple. Le spectacle des cieux pendant 24 h. ne change pas: les mêmes étoiles sont toujours visibles; les mêmes se lèvent et se couchent. — Il n'est donc pas possible de songer à cela pour déterminer les Longitudes. Il faut autre chose.

Le problème des Longitudes est fameux comme celui de la quadrature du cercle et de la trisection de l'angle.

83. Pour trouver les différences d'Heure en Temps, nous avons observé l'intervalle du passage des étoiles au méridien.

Nous allons traiter le problème Inverse. Nous ne faisons plus usage que d'une seule étoile et de deux méridiens.

Observons le moment où le méridien de St. Pétersbourg va passer par Procyon puis, la Terre étant emportée par sa Rotation, observons le moment où le méridien de Paris passera par la même étoile. L'intervalle des deux passages donnera la différence des Longitudes exprimée en Temps: en multipliant par 15, on l'aura en Degrés: mais on ne se donne pas cette peine, les Longitudes en Temps suffisent.

où est la difficulté? Les deux observations ne pouvant se faire au même point de la Terre, il y a deux pendules distinctes. L'observatoire de St. Pétersbourg a réglé son horloge sur le passage des étoiles à son méridien; de même à Paris. Il n'y a pas de comparaison possible. Comment faire.

Emploi de l'Électricité.

Procédons d'une manière plus uniforme. — D'abord, si l'on peut aller de St. Pétersbourg à Paris en 1 h. on peut avoir la Longitude. Mais il n'est pas besoin d'aller si vite si l'on a un bon chronomètre. — Saites que ce chronomètre marque 0 h 0 m 0 s au passage d'α d'Andromède au méridien, et ainsi au passage suivant: retour à St. Pétersbourg après longtemps pour cela. Puis venez à Paris, et vous y aurez l'heure de St. Pé. — Les nouveaux Chronomètres ont une grande précision: ils ne varient pas si on les Occident de Paris à Strasbourg, puis de Strasbourg à Paris. — J'ai supposé pour simplifier que l'instrument est parfaitement réglé: si l'on a une seconde de retard uniforme, on n'y touche pas: on en tient compte.

Les chronomètres servent donc pour de grandes distances.

L'empire Russe est fort étendu, et si l'on avait voulu effectuer une triangulation, on n'en aurait pas fini: on se transportait en poste avec de bons chronomètres: et l'on a fait ainsi la géographie Russe avec une grande exactitude.

84. avant que les Chronomètres ne fussent transportables, pour plus de précision on ne les remplaçait pas, et on les réglait d'un bus l'autre par le moyen d'un ou de plusieurs signaux par des feux de poudre.

Les signaux Électriques par les télégraphes ont été depuis peu employés en Amérique: — puis en France.

on s'est servi aussi depuis quelque temps en Angleterre, en Danemark et en Amérique, du passage des étoiles filantes. Ordinairement, il y en a 7 ou 8 par heure dans une moitié de ciel: on en a d'avril et en septembre, il y en a plus de cent. Il est donc impossible que, de deux points donnés de la Terre, l'un de ces météores n'ait pas été observé au même instant.

85. avant l'emploi Des Signaux Cérastes, on n'employait que Des Signaux Célestes. Les Eclipses surtout? les eclipses De lune ne peuvent servir, à cause De la pénombre. - Les eclipses Du Soleil n'ont pas cet Inconvénient, puisque la lune n'a pas D'atmosphère. Malheureusement, la lune est trop voisine De la Terre pour que le phénomène soit vu partout au même instant physique. on peut faire une correction: mais elle repose sur Des Tables lunaires qui sont peu précises. - Enfin, une éclipse De Soleil n'est visible qu'en peu D'endroits.

Depuis que Galilée ont observé que les eclipses Des satellites De Jupiter sont périodiques, on les a employés pour régler les Chronomètres. Malheureusement, selon qu'on a une vue ou une lunette plus ou moins bonne, l'éclipse arrive plus tôt ou plus tard. Malheur, l'observation Des satellites De Jupiter se fait avec Des lunettes trop longues pour être employées à bord Des navires.

86. Les phénomènes célestes dont on se sert en mer sont les déplacements De la lune ou Des Planètes par rapport aux Etoiles: mais les observations sont moins bonnes, parce que ces astres marchent lentement.

La lune passe successivement sur certaines Etoiles. - Supposons. la à l'état De Croissant. La dernière lende n'est pas visible: on ne voit que le bord De l'astre: et l'Etoile disparaît subitement: c'est la lune qui vient de passer devant.

Voilà un phénomène qui est un signal, comme un signal De feu. Si donc vous les jockeys voyiez ce phénomène au même instant, on peut s'en servir pour régler les Chronomètres. Mais il y a une correction à faire, parce que la lune est près De la Terre.

Mais les eclipses, ou occultations Des Etoiles par la lune sont trop rares (pour une Etoile suffisamment visible) pour un navigateur qui ne peut pas attendre.

Mais, qu'est-ce que cela veut dire, que la lune occulte une Etoile? - que l'Etoile est à une distance Du Centre De lecture peu marquée par le Rayon lunaire on peut donc y substituer l'observation De la distance D'une Etoile quelconque au Centre De la lune: on en conclut l'heure sans difficulté. Si pour le calcul (ou les tables) on a reconnu qu'aldebaran (qui est souvent occulté par la lune) sera, à minuit De Paris, à 2° du centre De la lune, et si en mer on observe cette distance De 2° . on en conclut qu'il est minuit à Paris. Si l'on s'en fait le matin pour vous, vous savez que vous êtes à 40° De long. O.

La connaissance Des temps contient Des Tables De Distances lunaires calculées 3 ans à l'avance: et qui fournissent la méthode la plus employée pour calculer la Longitude en mer.

Quel est le degré D'exactitude sur lequel on peut compter? avec une Lunette, un bon marin ne se trompera pas De $20''$: cela correspond à environ $\frac{1}{4}$ minute De temps. on a donc l'heure De Paris à $\frac{1}{4}$ minute près. cela fait $\frac{1}{4}$ De degré pour la longitude. à l'équateur, un degré a 28 lieues: c'est une erreur marine De 3 lieues.

avec une série D'observations, on peut avoir une plus grande approximation:

87. But à déterminer l'heure De lune où elle est.

(incomplet).

88. Nous savons donc déterminer les longitudes et latitudes, les R et les Péchisions.
Nous pourrions donc construire des globes terrestres et célestes.
89. Triangulations terrestres.
Grande triangulation française. - Vérification. - Exactitude de 2 pieds.
90. Cartes géographiques.
Projection orthographique.
" Steréographique.
Cartes de Mercator. - Loxodromie. -
91. Hauteur moyenne au dessus de la mer:
- | | |
|-------------|------------|
| Europe | 650 pieds. |
| Amérique N. | 750 " |
| Asie | 1100 " |
| Amérique S. | 1150 " |
| Afrique | Inconnue. |

9^e. Leçon.

92. Forme De la Terre.

Éclipses De Lune.

Mesure De la Circonférence.

Proposition De la mesure De la Terre se compose. D. Deux questions distinctes :

1^o. Mesurer en pieds la Distance De A à B.2^o. Evaluer l'Arc AB en Degrés.

93. Deuxième Question. - Des Developpements.

Plaines De Pensylvanie : Réglés juxtaposés.

Triangulations.

94. Troisième Question. - Rien n'est plus facile si AB est sur un méridien : on valant en Degrés et la Différence Des Latitudes.

Si c'est sur un parallèle, c'est la Diff. Des Longitudes.

94. Les astronomes D'Alexandrie sont les premiers qui aient mesuré avec quelque exactitude les dimensions De la Terre. Ils avaient remarqué qu'à Siennne il existait un puits dont le soleil venait éclairer le fond au Solstice D'Été, et qu'à ce moment, le soleil était à $5^{\circ} \frac{1}{2}$ Du Zenith D'Alexandrie. Ils en avaient conclu que si, au Solstice D'Été, le soleil était au Zenith De Siennne et à $5^{\circ} \frac{1}{2}$ De celui D'Alexandrie, c'est que l'Arc qui sépare Siennne D'Alex. est de $5^{\circ} \frac{1}{2}$. Mesurant la Distance en Stades, ils eurent la Grandeur De la Terre. Les Documents sont perdus : nous ne savons pas quelle était la Valeur Du stade.

Il est impossible que les astronomes D'Alexandrie qui avaient Des Instruments pour mesurer les angles se soient contentés De procédés aussi grossiers. Probablement que dans Siennne il y avait plusieurs puits jurant De cette propriété, et c'est la croyance populaire qui nous aura été transmise. Mais, nous sommes réduits à Des conjectures sur la valeur Du stade, en sorte que nous aurons plutôt là un moyen De déterminer la longueur Du stade, en supposant que l'opération ait été bien exécutée.

95. On avait remarqué aussi, dans les Voyages De Rhodé à Alexandrie, que Canopus Du navire n'apparaît qu'un Instant à l'Horizon De Rhodé, tandis qu'il passe à $7^{\circ} \frac{1}{2}$ au dessus D'Horizon D'Alexandrie. On en conclut qu'entre cette ville et Rhodé, il y avait $7^{\circ} \frac{1}{2}$ De la Circonférence De la Terre. Cette observation ne pouvait être bien précise, à cause Des Réfractions. Mais qu'il en soit, quant à la Distance en Stade De Rhodé à Alexandrie, les anciens paraissent avoir conclu Du Champ qu'il fallait pour aller D'un De ces lieux à l'autre.

96. Les Deux Résultats sont Différents : mais nous Ignorons si c'est le même Stade.

97. Je passe sur les Résultats Des mesures faites par ordre Des Césars : elles n'ont aucune précision.

98. La première mesure prise en France fut faite D'une manière assez singulière. Onnet : D'Amiens à Paris. -

99. La Cassini reprit ces mesures. Mais nous devons dire que Des lors on fut obligé De reconnaître que la Terre n'est pas sphérique, mais aplatie vers les pôles.

Voici les Raisons.

Nous le commençant Du 18^e siècle, l'Académie Des Sciences, qui s'occupait

De faire avancer l'astronomie, envoya Richer à Cayenne. Cassini s'occupait alors beaucoup de la Réfraction, et il avait établi une théorie précise des Réfractions, fondée sur des observations. On ne connaissait pas les pouvoirs Réfringents: et l'on était obligé de les calculer par des observations astronomiques en observant le Soleil. Le Soleil, nous le verrons, se meut dans une orbite plane: mais, si on observait sans tenir compte des Réfractions, sa trajectoire paraîtrait à double courbure: donc, pour calculer les Réfractions, on cherchait quelles valeurs il fallait leur donner pour qu'elles s'accordaient toutes à donner au Soleil une trajectoire plane.

Il y avait là deux théories mêlées ensemble: la théorie des Réfractions, et celle du Soleil. Ce fut dans la vue de les perfectionner qu'on envoya Richer à Cayenne. Car dans celle, qui est près de l'équateur, le Soleil ne s'écarte jamais beaucoup du zénith: et, comme on avait déjà le moyen de corriger les Réfractions près du zénith, on pouvait s'assurer si la trajectoire solaire était bien réellement plane. — Une fois que la théorie du Soleil est ainsi mieux établie, et d'une manière indubitable, on observerait pour les Réfractions, et l'on en pourrait faire la théorie.

Richer emporta avec lui une horloge bien construite et parfaitement réglée à Paris. Quand il vint à l'échelle à Cayenne, elle ne battait plus 86400 secondes entre deux passages d'une étoile au méridien, elle battait moins: elle avait une marche plus lente: et cela n'était pas dû à une altération du balancier; car, de retour à Paris, l'horloge recommença à battre 86400".

Qu'est-ce que cela signifiait? On sait que les oscillations du pendule dépendent de l'intensité de la pesanteur. La conséquence manifeste était celle-ci qu'à Cayenne, vers l'équateur, la force de la gravité était moins considérable qu'à Paris. Tout naturellement, on pensa qu'elle devait aller en diminuant des pôles vers l'équateur.

Deux écoles se formèrent alors. D'une soutint que la Terre est renflée à l'équateur, aplatie aux pôles; l'autre, et Cassini à la tête, soutint qu'elle était l'inverse. Newton était à la tête de la première, et disait que la Terre tourne autour de son plus petit axe.

On ne peut dire que l'opinion de Cassini ait retardé la science, car elle a été la cause d'un grand nombre de travaux de physique. — Et cette phrase de Cassini n'a guère rendu à la science que ce service, philosophiquement parlant: c'est de donner naissance à de nombreux travaux, qui ont prouvé le contraire de ce qu'ils avaient avancé. — Cependant, le premier, Dominique Cassini, a découvert les satellites d'Uranus et la lumière zodiacale: mais les successeurs soutinrent toujours le contraire de la vérité.

Voici comment Newton soutenait son hypothèse. —

Force centrifuge: (d'attraction de la matière). Circulaire. Courbes des chemins de fer.

Supposons un corps se mouvant sur un arc de rayon r , la circonférence étant estimée en mètres. Supposons que sa vitesse v soit estimée en mètres et par seconde. appelons g l'intensité de la pesanteur, le double de la quantité dont un corps tombe en 1". appelons P le poids du corps en kil. Quelle est la force centrifuge qui tend à le faire dévier? C'est

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{r}$$

Donc, plus la vitesse est grande, plus la force centrifuge est considérable: et comme elle est prop. au carré de la vitesse, si celle-ci double, elle devient quadruple.

Et, comme le Rayon se trouve au Périmètre, s'il devient deux fois moindre la force est doublée. on a donc tout indiqué sur les chemins De fer à nam que des Courbes D'un Grand Rayon, et on marche Dens avec une petite vitesse.

Newton dit D'abord qu'il étoit Vrai. Certain que la Terre tourne autour de PP' , et qu'il devoit en résulter une force Centrifuge. Il considéra que cet effet ne devoit pas être le même dans toutes les parties De la Terre, car les parties voisines Du pôle ont une Vitesse moindre. Pour les différents points De la Terre, $\frac{V}{r}$ et constant; donc $\frac{V^2}{r}$ ou augment Du pôle à l'Equateur. Mais, si les parties Equatoriales sont soumises à une force qui est moindre ou nulle pour les autres, il est facile De voir que l'Equilibre, en supposant la Terre fluide primitivement, n'a pu s'établir à moins d'un aplatissement aux pôles. or, tout nous prouve que cet état a existé.

Considérons en effet, dans ce fluide primitif, un canal allant Du centre au pôle, et un autre allant Du centre à l'Equateur. Suivant les lois De l'Hydrostatique pour qu'il y ait Equilibre, il faut que les deux poids se fassent Equilibre. or aucune partie Du 1^{er} n'est soumise à l'action De la force centrifuge: tandis que la partie apparente Du 2^d. = son poids réel - force centrifuge. donc, pour que le canal Equatorial contrebalance le canal polaire, il faut qu'il soit plus long.

En soumettant cette hypothèse au calcul, on peut arriver à déterminer la grandeur De l'aplatissement. on en trouve un un peu trop fort; c'est que la matière n'est pas répartie Uniformément dans le Globe, et que la nature De la matière Centrale est Inconnue.

Voici maintenant une autre preuve.

Si la Terre étoit aplatie vers les pôles, la longueur De l'arc compris entre deux verticales Distantes De 1° . ne devoit pas être partout la même. Il est facile De voir que moins un arc est courbe, plus il faudra se déplacer pour que les deux verticales fassent un angle De 1° .

Il n'y avoit qu'un moyen De trancher la question: c'étoit De mesurer Différents arcs: et De voir si l'arc De 1° . est 7 au pôle qu'à l'Equateur. Si cela a lieu, l'hypothèse De Newton est Exacte; sinon, c'est celle De Cassini. - Il est vrai que Cassini avoit commis une autre erreur, par un Raisonnement Géométrique Inexact, en supposant que les verticales sont toutes parallèles au centre De la Terre.

100. Par les lois De Cassini fut entreprise la première mesure qui devoit être Exacte. Elle sembla donner raison à Cassini: le degré Du N. étoit plus grand que celui Du S. Mais il ne fut pas difficile De penser que la Terre étant peu aplatie, il pouvoit arriver que les erreurs D'observation fussent plus grandes que les Différences Des arcs.

101. Mesures plus exactes. - Le Condamin, Bouguer, etc.

2700 pds et la Différence entre l'arc De 1° . dans les Indes et en Suède

102. Les mesures D'Arcs sont les éléments à l'aide Desquels on peut mesurer les Dimensions De la Terre. - Quand on soumet la question à l'analyse mathématique, on en déduit le Rayon polaire et le Rayon Equatorial. on trouve

Diam. Equatorial	41447192 pds	} Diff. 139868 p.
" Polaire	41707324 "	

La mesure de cette différence est la hauteur du Bourrelet Equatorial: elle est environ 5 ou 6 lignes.

on peut remarquer que ces deux diamètres sont entre eux comme 299 et 298: et aplatissement est donc sensiblement $\frac{1}{298}$.

103. on veut sans peine que le calcul puisse donner le méridien complet (mètre) et par suite la longueur du mètre.

10°. Secon.

104. Nous arrivons à la Théorie du Soleil.

Mais d'abord, l'Ellipse.

Propriétés principales.

Question inverse: on a une Ellipse tracée, Trouver son centre, ses axes, etc. - C'est ainsi qu'on peut résoudre.

à effectuer un arc d'Ellipse.

Constructions.

Propriétés optiques - calorifiques - sonores.

Théorie du Soleil.

105. Le Soleil nous apparaît sous la forme d'un Globe lumineux, et qu'à première vue on estime circulaire. Cependant, comme nos sens pourraient nous tromper, et que d'ailleurs nous aurons besoin de connaître les vraies dimensions, examinons plus attentivement la chose. - Pour cela, on place au foyer d'une lunette deux fils parallèles qu'on peut amener, l'un sur le bord de Droite, l'autre sur le bord de Gauche, par des vis extérieures. - Dans une lunette ordinaire, si vous faites cette opération, vous n'arriverez pas, à cause du mouvement apparent du Soleil, à moins que ce ne fût au passage au méridien, avec des fils noirs ou blancs. On a des appareils qui tournent, et font que la lunette suit l'astre, en sorte que la mesure précédente n'offre pas de difficulté. - Micromètre. - Si, dans l'arrangement des vis,



on tourne l'instrument de façon à déplacer les deux fils, on les trouve encore tangents aux deux. - à quelque instant de l'année que l'on observe le Soleil, on trouve ainsi que tous ses diamètres sont égaux.

Il en résulte qu'à toutes les époques, la figure du Soleil est un cercle. Par la prochaine leçon, par l'observation des taches, nous conclurons qu'il tourne, et nous présenterons successivement ses diverses faces. - En rapprochant cette connaissance, que nous acquerrons plus tard, de la précédente, nous en concluons que le Soleil est une sphère parfaite.

106. Je viens de dire cependant que le Soleil tourne sur lui-même. Cela, on est disposé à le croire aplati. L'observation ne veut pas dire autre chose, sinon que cet aplatissement est peu de chose. Le diamètre solaire étant de 1920", si l'aplatissement était seulement $\frac{1}{400}$, cela ferait 6" de différence qu'on observerait aux micromètres. - C'est que la vitesse de rotation du Soleil est très faible: sa révolution dure 25 jours: et l'aplatissement est $\frac{1}{6000}$ environ.

106. Lorsque mesure le Soleil à différentes époques, on trouve que son diamètre n'est pas invariable. ainsi

31 Octobre , maximum Diam. = 32' 32"
 1^{er} Juillet , minimum Diam. = 31' 26".

Moyenne 32' just.

Donc, en Hiver, le soleil est plus près de nous qu'en été.

Ces mesures nous servent à calculer la grandeur du soleil quand nous connaissons la distance.

11^e. Leçon.

107. Le Soleil a un mouvement propre. Il se déplace chaque jour de quantités considérables par rapport aux étoiles. Il se transporte dans les différentes Régions du ciel, et parcourt une voie. Dans l'espace d'une année.

Cette observation demande de l'attention. - Le mouvement ordinaire peut se constater dans l'espace d'une nuit. Mais la lumière du Soleil empêche d'apercevoir les étoiles tant qu'il est sur l'horizon. - Cependant on peut, en observant les étoiles qui se lèvent quand le Soleil se couche, constater leur déplacement graduel. - Un mois après, les étoiles ci-dessus seront à une certaine hauteur quand le Soleil se couche. et les étoiles sont fixes : c'est donc le Soleil qui s'en est rapproché.

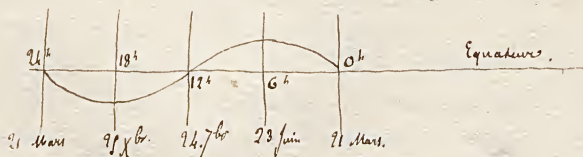
108. Au Risk, des observations plus précises démontrent plus rigoureusement l'existence de ce mouvement du Soleil.

Pour savoir comment on obtient la distance des astres en ascension droite en effet, supposons que la pendule sidérale marque 0^h. au passage de α d'Andromède et 3^h lors du passage du \odot . Si, deux mois après, on fait une nouvelle observation, on trouve que l'horloge marque 7 heures. Donc le Soleil a avancé dans deux mois de l'intervalle correspondant à 4 heures. - c'est le 21 Mars environ qu'il passe au Méridien avec α d'Andromède : puis il s'éloigne de plus en plus, jusqu'à ce que la même coïncidence se reproduise après un an.

on n'observe pas le passage du centre du \odot , mais ceux des deux bords, et l'on prend la moyenne des deux observations.

Dans cet intervalle de temps, le Soleil ne reste pas toujours dans l'équateur. La mesure de sa déclinaison prouve qu'il est tantôt au-dessus, tantôt au-dessous. - cette mesure se fait absolument comme pour les étoiles. Ici encore, on mesure la déclinaison des deux bords, afin d'avoir celle du centre qui en est la moyenne.

Quand le Soleil est dans le méridien de α d'Andr. il est dans l'équateur sa déclinaison est nulle. Cela arrive vers le 21 Mars. Sa déclinaison augmente 3 mois après, vers le 23 Juin, elle est de 23° 29'. Il est alors dans le méridien de γ . à partir de cette époque, la déclinaison du Soleil paraît stationnaire pendant quelques jours. ainsi on appelle ce point le Solstice d'été. - puis la D. diminue, et vers le 24 Sept. il est de nouveau dans l'équateur. - dans les 6 autres mois de l'année, le Soleil suit, de l'autre côté de l'équateur, une courbe identique avec la précédente, mais au-dessous.



au 21 Juin la D. est encore 23° 29' australe. C'est le Solstice d'hiver. En fin au 21 Mars, il est de retour dans l'équateur et recommence la même Route.

109. Mais c'est là qu'une orbite apparente, provenant de ce qu'on a déplié

En cercle du ciel sur un plan. Que deviendra cette orbite sur la sphère? Il est facile de le savoir: il suffit de construire des méridiens espacés par ex. de 15° et de porter dessus des arcs égaux aux déclinaisons correspondantes du soleil. On joindra par un trait continu tous les points ainsi obtenus, et l'on reconnaitra qu'ils sont tous situés sur un grand cercle de la sphère céleste. On appelle ce cercle le plan de l'Écliptique. Son inclination sur le plan Équatorial, égale à la plus grande déclinaison du soleil, est de $23^\circ 28'$. Elle éprouve de légères changements, sur lesquels nous reviendrons.

110. Par définition, on compte les méridiens à partir du point où le soleil coupe l'Équateur au 21 Mars, de l'intersection de l'Équateur et de l'Écliptique. Il est arrivé par hasard que c'est d'Androm. se trouve dans ce méridien. Voilà pourquoi on prend cette étoile pour origine.

Quant aux points d'intersection, on les appelle Équinoxes de printemps et d'automne. Les dénominations sont liées des saisons.

111. Les observations ci-dessus ne suffisent pas. Il faut étudier le mouvement du soleil dans le plan de l'Écliptique. Nous ne connaissons pas encore la nature de sa courbe. Il faut pour cela tenir compte de la distance du \odot à la Terre, et non pas seulement de la direction dans laquelle il se trouve.

Naturellement, le soleil est à une distance variable de la Terre, puis que son hémicycle apparent varie.

Cela ne prouve pas que la courbe ne soit pas un cercle: il se pourrait que cela fût un; la Terre ne serait pas au centre.

112. Les mesures de l' M , de la D , et du Diam. apparent permettent de trouver chaque jour la position du soleil dans son plan.

Soit T la Terre; TE la ligne allant à l'Équinoxe, TS celle qui va à une autre position du soleil. — L'angle ETS est ce qu'on appelle la Longitude astronomique. — Cette longitude, comptée dans le plan de l'Écliptique se réduit facilement de la connaissance des M .

Voici quelques nombres:

	1 ^{er} avril	1 ^{er} juin	1 ^{er} Août	1 ^{er} Octobre	1 ^{er} Décembre	1 ^{er} Février
Longitude	12°	71°	129°	188°	249°	312°
Diam. app. app.	$1920''$	$1893''$	$1893''$	$1920''$	$1950''$	$1949''$

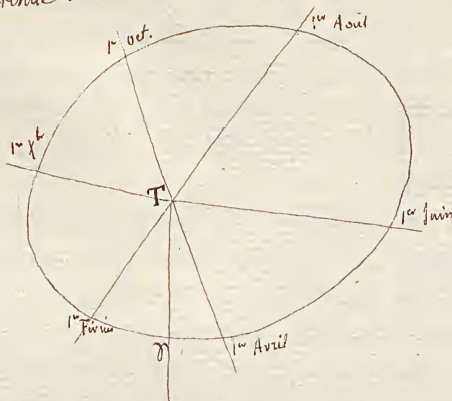
Si donc on peut trouver à quelle distance est le soleil de la Terre à chacune des dates précédentes, on pourra connaître les positions du soleil sur ces droits, sur ces directions. Or, il est facile de comprendre que plus un objet est loain, plus son diamètre apparent diminue, et que la distance (pour de petits angles) est en raison inverse du diamètre apparent. En prenant pour Unité la distance du soleil au premier avril, quand son diam. apparent est $1920''$, la formule qui donne la distance sera évidemment

$$\text{Dist.} = \frac{1920}{D}.$$

De sorte que les distances seront, aux Époques ci-dessus,

1,0000 1,0143 1,0143 1,0000 0,9854 0,9857

on porte sur les Rayons Correspondants Des longueurs proportionnelles à ces nombres.
 Rien n'empêche De faire les Déterminations Intermédiaires, puis De joindre ces points
 par une ligne continue.



on cherche alors si la courbe est un cercle. Or, en menant une corde et une perp.
 au milieu, celle-ci ne passe pas par le centre.

Donc la courbe n'est pas un cercle.

113. Pour en trouver la nature, il a fallu venir jusqu'à Kepler.

Les anciens Egyptiens croyaient que le Soleil parcourait sa Course en 360 jours.
 D'où vient la Division Du Cercle en 360°. - On s'aperçut bientôt que cette hypo-
 thèse est insuffisante, et plus tard les Chaldéens, puis ne pas Renoncer à
 l'hypothèse Du mouvement circulaire, supposèrent que le Soleil était
 un cercle Dont la Terre n'occupe pas le Centre.

1400 ans après, les Travaux De Tycho-Brabé et De Kepler son Disciple
 ont enfin démontré que cette courbe est une Ellipse Dont la Terre occupe
 un foyer.

Il n'est pas cependant sur le Soleil que Kepler a fait sa découverte: c'est
 sur la planète Mars. - Tycho-Brabé était lui-même Disciple D'un ancien
 astronome, Guillaume IV, Landgrave De Hesse. après avoir employé 20 ans
 à Des observations astronomiques, il mourut en laissant tous ses manuscrits
 à Kepler, après qu'il en eût le meilleur parti possible. - Kepler, Remarquant
 sans cesse quelques positions De Mars Différentes De 7' environ Des positions que
 lui assignait l'hypothèse Du cercle excentrique, fut amené à Rejeter cette
 hypothèse, et découvrit la première Des lois qui portent son nom,
 celle Du Mouvement Elliptique.

12^e. Leçon.

114. Nous avons établi le mouvement apparent Du Soleil à travers les Constellations. Nous avons reconnu que ce mouvement, celui de l'O. à l'E. c'est à dire en sens inverse Du mouvement. Normal, de Droite à Gauche.

Par suite De ce mouvement, le Soleil traverse l'Equateur au 21 Mars. Si s'inclinait ou devint Nordale, elle augmenterait jusqu'au 23 Juin, où elle est de 23° 28', vers le 2^e du mois de Septembre, il traverserait l'Eq. etc.

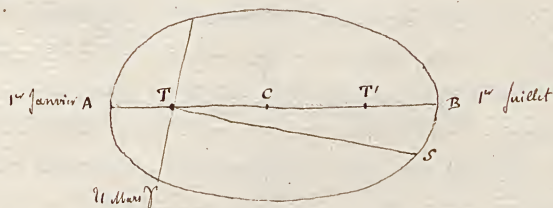
Le caractère D'une science est De ne pas se contenter D'observations, mais De les Relier ensemble par Des Théories. - Ce que nous avons à chercher, c'est la manière De Relier tous ces faits.

Nous avons trouvé que la courbe est plane. -

Figure. - Ecliptique. - Equinoxes.

Mais quelle est la Courbe véritable que décrit le Soleil? Il y a bien De s'en demander, puisque les diam. apparents sont variables. - Pour y arriver, nous avons calculé les distances au moyen De ces Diamètres, et autres, combinant les observations en AR et D. qui donnent chaque jour De l'année la direction Du Soleil, avec les distances De la Terre au O, nous avons obtenu une courbe qui, en premier aspect, ressemble beaucoup à une Ellipse, la Terre étant située sur le Gr^d axe, mais non au centre. Kepler a reconnu que c'est véritablement une ellipse. - En menant deux cordes parallèles et joignant leurs milieux, on a un diamètre, dont le milieu est le centre De l'ellipse. - Rien de plus facile que De déterminer les axes en décrivant une circ. concentrique. - on reconnaît que le grand axe passe par la Terre, et que le petit n'y passe pas. - Si donc on suppose avec Kepler que la courbe est une ellipse, et que la Terre occupe un De foyers, on trouvera facilement l'autre: et si l'on cherche à l'aide De ces deux foyers à décrire une ellipse, elle coïncidera avec la Courbe D'après l'observation.

115. Comment est placée cet ellipse Dans le plan De l'Ecliptique? Le grand axe passe-t-il par l'Equinoxe ou par le Solstice? - Cette situation sera connue, si l'on joint que le Gr^d axe fait avec la ligne Des Equinoxes un angle De 100°:



au 21 Mars, en T, le O se trouve à l'Equateur. - Si TS est perp. à la ligne Des Equinoxes, S est le Solstice.

116. Les variations De la température sont dues à d'autres causes que la distance. autrement, il ferait plus chaud en hiver qu'en Eté.

117. apogée. - Périgée. -

118. Il n'est personne qui n'ait été frappé De ce fait que, Dans leurs Ephémérides, les astronomes annoncent 10 ans à l'avance la position Des astres, et prédisent les Eclipses. - Comment arrive-t-on à un pareil résultat?

Voici les premières données dont on peut faire usage dans ce but. - Quand on a une fois fixé la position d'un astre, et qu'on sait qu'il tourne perpétuellement dans une même orbite, il y a, bien sûr, moins d'incertitude. Cela diminue la difficulté. Il n'y a donc qu'à faire une fois pour toutes la position du \odot par ex. dans son orbite.

Le second point de cette théorie du Soleil est. Tout le monde de l'astronomie.

119. J'ajouterais que dans cette ellipse solaire, l'excentricité $TT' = \frac{1}{60} AB$. en sorte que si vous vouliez tracer la figure avec un grand axe de 60 centim. la distance des deux foyers serait 1 cent. - donc l'ellipse est très-semblable à un cercle. - Plus exactement, $e = 0,017$. Si vous prenez un grand axe de 1^m. vous auriez 17 mm pour la distance focale TT' .

120. Il n'y a donc plus qu'à chercher comment le Soleil se meut dans son orbite. Rappelons-nous pour cela les distances du Soleil à la Terre:

{	1 ^{er} avril	1 ^{er} juin	1 ^{er} août	1 ^{er} oct.	1 ^{er} X ^{ls}	1 ^{er} février (année bissextile)
	1,0000	1,0143	1,0143	1,0000	0,9854	0,9857

Maintenant, avec quelle rapidité le Soleil se meut-il dans son orbite?

L'hypothèse la plus simple avait été faite par les premiers astronomes. Ils pensaient que la ligne qui va de la Terre au Soleil, le Rayon vecteur du \odot , parcourt le même angle dans le même temps. Cela est-il vrai? - Si l'on observe la situation du Soleil dans son orbite le 1^{er} avril, et qu'on recommence le lendemain, on trouve que l'angle parcouru est

59' 4"

le 1^{er} juin, cet angle est

57' 25"

Voilà qui tranche la question: il y a près de 2' de moins en un jour. Voilà les angles parcourus en 22^{es} jours à ces 6 époques.

	1 ^{er} avril	1 ^{er} juin	1 ^{er} août	1 ^{er} octobre	1 ^{er} décembre	1 ^{er} février
Dist. du \odot	10000	10143	10143	10000	9854	9857
Chemin parcouru	3544"	3445"	3445"	3544"	3652"	3650"

Il nous est donc impossible d'admettre l'hypothèse d'un mouvement angulaire uniforme. Nous sommes obligés de la laisser de côté.

(on peut remarquer que le Soleil parcourt environ 1° pour jour. - or Castor est distant de Pollux de 1°. C'est une coïncidence.)

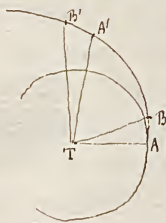
121. Le loi est donc différente. - Pour la trouver, il faut chercher un tableau ci-dessus.

La première chose qui frappe, c'est que des mouvements égaux varient d'après les distances locales: - et cela pourrait nous faire croire qu'il existe une liaison entre la distance et le mouvement angulaire. - En effet, on voit que, plus la distance est grande, plus le mouvement est lent.

Quelle est donc la loi?

Nous pouvons à peine remarquer que l'hypothèse la plus simple à faire, serait de supposer que le Soleil parcourt son ellipse d'un mouvement uniforme. Or, il est évident que, s'il en était ainsi, l'angle

Dicrît serait d'autant plus petit que le Soleil est plus loin : ainsi, en supposant que



le \odot parcoure sur sa courbe des arcs égaux en Temps égaux, on rendrait compte de cette apparence que le mouvement angulaire est d'autant plus lent que le Soleil est plus loin.

Voilà donc si cette hypothèse est admissible. - Une simple multiplication va nous l'apprendre. - Soient des arcs de même Rayon, les arcs sont proportionnels aux angles au centre. Mais si les Rayons sont 1^m et 2^m, l'arc de 1^m dans le 1^{er} sera le moitié de l'arc de 1^{er}. Dans le second. - ainsi la tangente d'un arc est en raison composée de son angle et du Rayon de la circonf. où il est : il double quand le Rayon double, il double encore quand l'angle double. - Il en résulte que, notre Ellipse étant presque un cercle, le chemin parcouru dans le petit intervalle d'un jour est strictement proportionnel au produit des deux membres écrits l'un sous l'autre dans le tableau précédent : et il faudrait, pour que notre hypothèse fût bonne, que tous ces produits fussent égaux. - or les deux premiers sont

3544 et 3494.

Voilà la question tranchée : il n'y a pas besoin d'aller plus loin pour rejeter cette hypothèse : car le propre d'une théorie est de répondre à tous les cas. De moment qu'elle ne satisfait pas à un seul, elle cesse d'être exacte.

122. Faisons cependant toutes les multiplications, afin de nous en servir dans le cas d'une nouvelle hypothèse. - Nous trouvons :

3544 3494 3494 3544 3599 3597

Il en résulte cette conséquence que non seulement le mouvement angulaire est d'autant plus grand que le \odot est plus près, mais que les mouvements angulaires réels satisfont mieux à cette condition.

Obligé de rejeter l'hypothèse du mouvement réel, c'est ici que Kepler eut un trait de lumière. Il eut une seconde hypothèse qui lui a réussi. Il a supposé qu'il ne pourrait pas y avoir d'égalité entre les quantités que je vais vous indiquer.

Si nous joignons T à chacune des positions du Soleil à 2 jours différents (1^{er} et 2 avril) nous avons un secteur dont la surface est facile à trouver. Soit ATA' . - Soit BTB' le secteur correspondant pour le 1^{er} juin, etc. Kepler eut l'idée, et c'est là ce qui a fondé les progrès de l'astronomie et a donné à Newton le moyen de découvrir l'attraction Universelle, - et eut l'idée de comparer ces surfaces entre elles. - c'est là ce qui constitue la seconde loi. La première était que

Les planètes décrivent des Ellipses dont le \odot occupe un foyer.

La seconde est que chaque jour, en 24 h. quelle que soit la place que la planète occupe dans son orbite, la portion de plan compris entre

la courbe et les Deux Rayons Vecteurs est rigoureusement constante.

Cherçons à le vérifier. - La surface d'un Pichon est le produit de l'aire par la moitié du rayon.

Encore bien qu'il s'agisse d'une ellipse, on peut admettre qu'un
Petit ellipse se confond ici avec un petit cercle.

P: Donc la loi est vraie, multiplions chaque distance par le premier calculé tout-à-l'heure, et tous les produits devront être égaux. - Le premier produit est 3544.
Le second

Second

$$\begin{array}{r} 3494 \\ 1,0143 \\ \hline 3494 \\ 34,94 \\ 13,98 \\ 1,05 \\ \hline 3544 \end{array}$$

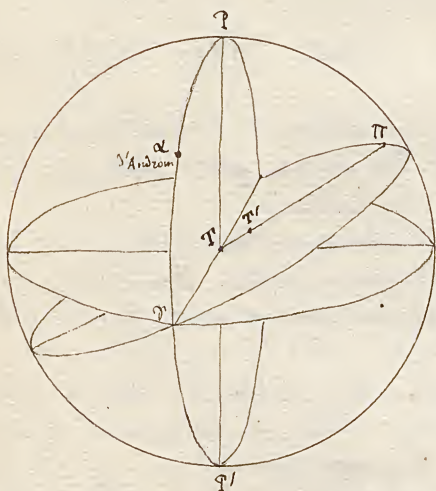
et aussi 3/4. - Et de même pour les autres.

Le Bruyon vickers Balais donc au 1^{er} juin la même protection de
Surface qu'au 1^{er} avril.

ainsi donc la loi de Mûpter, qu'on vérifie de même pour toutes les
Époques Intermédiaires, est bien Exacte:

Les Surfaces balayées par le rayon vecteur sont proportionnelles au temps.

123. Sans la difficulté qu'il y a à traduire cette loi en analyse, nous pourrions que nous avons tout ce qui est nécessaire pour prévoir quelle sera à une époque quelq. la position du soleil sur la sphère. Je donne la sphère céleste



la ligne des poles, et l'Equateur, et le méridien d'd
d' Andromède: cela me donne le point Equinocial
d' du printemps. Si pour δT je mène un
grand cercle incliné de $23^{\circ} 28'$ sur l'Equateur,
nous aurons l'Ecliptique. — Il nous est possible
maintenant de tracer dans le plan de l'ellipse
Solaire. Soit un angle $\delta T \Pi = 100^{\circ}$. C'est la
direction du grand axe. Si maintenant nous
prenons le rayon $T \Pi = 1$, et $T T' = 0,017$,
 T' sera le second foyer de l'ellipse, que nous
pourrions décrire.

actuellement, ouvrir une Table. Du 3: vous
trouverez le moment Du 21 Mars, où le
Soleil passe en γ . Parailleurs, une observation
vous l'apprendrait. - avec la 2^e. Loi de Laplace

qui donne la surface balayée chaque jour (3^{es} 44), il est facile d'en déterminer la position du \odot à un moment donné. — Posez cette question: De combien faut-il faire avancer le Rayon Vecteur pour que la surface balayée soit égale à une surface donnée?

Il est le secret du mécanisme des Ephémérides. — L'ensemble, on en parle
le calcul.

124. Le mouvement Du Soleil n'étant pas Uniforme, le méridien Dans lequel il se trouve chaque Jour ne le voit pas Uniformement. — Et, grand même le mouvement. Du O serait Uniforme, celui De son Méridien ne le serait pas encore. — Car il est clair que Des arcs Égaux De l'Écliptique, au Solst'ice et à l'Équinoxe, n'ont pas même projection sur l'Équateur.

ainsi, Deux Causes s'opposent au mouvement Uniforme Du Méridien Du Soleil. — En toute Rigueur, on pourrait se demander si ces Deux Causes ne se Compensent pas. — En soumettant la question au Calcul, on voit qu'il n'en est Rien.

Mesure du Temps.

125. Pour l'astronome, la mesure Du Temps ne présente aucune Difficulté. Car nous avons dit que les Retours Successifs D'une Étoile au méridien sont toujours Égaux pour le même Intervalle De Temps. — Il y aurait donc Dans le mouvement Des Étoiles tout ce qu'il faudrait pour Régler le mouvement Des pendules, et c'est ce qui se fait en effet Dans les Observatoires: on les synchronise marquant 0^h. 0^m 0^s au passage De l'Équinoxe V au méridien: et, comme à l'Andr. et à très-peu près Dans ce méridien, c'est pour cela que j'ai dit qu'on se réglait sur cette Étoile.

Mais si cette manière De régler les horloges sur les Étoiles est Commode. Dans les Observatoires, cet usage est Inapplicable Dans la vie civile. En effet, supposons qu'à un certain Jour (cela n'est peut-être que le 21 Mars) on observe le passage De α d'Andromède et Du O au Méridien, et que cela ait lieu Rigoureusement au même Instant physique. — Imaginons que notre pendule marque 0^h 0^m 0^s au p. moment De ce passage simultané. Laissons s'écouler 24^h. nous observons De nouveau le passage D'α d'Andr. au méridien. Le Soleil n'y sera pas encore, et ne passera au méridien que quelque Temps après. Il est facile D'avoir le Retard. En 1 an, le O parcourt la sphère, un cercle De 360°. Donc, en 24^h. il parcourt 1°. environ, ce qui, en Temps, fait 4^m: car nous faisons abstraction Des Inégalités. — Donc le passage Du O au méridien a lieu,

le 21 Mars,	à	12 ^h .
22		12 ^h 4 ^m
23		12 ^h 8 ^m
24		12 ^h 12 ^m

etc.

Un mois après, le 20 avril, le Soleil aura Rétrogradé D'environ 30°, qui mettront le Soleil en Retard De 2^h. — au bout De 6 mois, le passage Du O au méridien aurait lieu à minuit De la pendule. — au bout D'un an, le Soleil aurait passé une fois De moins au méridien.

C'est cela est impossible. — Il faut avoir Des horloges qui marquent midi quand le Soleil est au milieu De sa course.

126. Pour y arriverait, on réglerait autrefois les horloges sur le O. C'est ce qu'on fait encore Dans bien Des Communes De France, mais c'est

un mauvais moyen. Car les Jours Solaires ne sont pas Égaux entre eux
puisque son mouvement. compte parallèlement. à l'Équateur est variable.
Nous ne savons pas construire d'horloges qui suivent rigoureusement le mouvement
inégal du Soleil. on a cherché à en faire. Mais ce ne sont que des pièces curieuses.
Une horloge qui suivrait exactement le \odot irait tout de travers: car ce serait
pour l'hiver, et cela ne continuerait pas.

127. Voyons comment on peut avoir une mesure de Temps commune à tous les
pays.

Faisons une hypothèse. Imaginons qu'en midi l'empire que le \odot part de
l'Équateur au 21 Mars pour suivre son orbite d'un mouvement inégal, un second
Soleil en parte également et suive l'Équateur d'une manière parfaitement Uni-
forme. Supposons encore que, pendant que le vrai Soleil parcourt toute la Route
de l'équateur à revenir au point de départ, le Soleil fictif revienne aussi au même
instant au point Équinoxial γ . —

on est convenu de régler les horloges, non sur le vrai Soleil, mais sur le
Soleil fictif.

Quelques Explications sont nécessaires.

Nous avons dit en effet qu'il faut que les horloges marchent midi à Midi
vrai: et je vous dis maintenant qu'il faut régler nos horloges sur un
autre Soleil. vous me demanderez si les horloges marchent alors Midi à
midi de la Journée. Or, s'il est vrai que le Soleil vrai ne le fait pas Uni-
formément, il est vrai aussi qu'il n'y a pas de grandes différences, et si l'on
compare pour le calcul la position du \odot vrai avec celle du \odot fictif, on trouve
que l'angle de leurs méridiens est toujours très-faible, de façon qu'entre les
deux passages au méridien, il n'y a jamais plus de $17'$ d'intervalle (en temps).
quelquefois, ils passent ensemble. Or, qu'importe $17'$ sur le midi d'un jour,
si cette différence ne se manifeste pas évidemment d'un jour à l'autre?
on ne s'en aperçoit même pas. — Il n'en serait pas de même si le midi étoit
déplacé de 2 ou 3 heures.

ainsi, la condition énoncée sera remplie. ainsi, s'il y avoit bellement
deux l'Équateur un pareil Soleil, on l'emploieroit avec avantage pour régler les
horloges, de préférence aux étoiles.

Maintenant, comment régler les horloges sur ce Soleil fictif? Par le
même calcul qui apprend qu'il n'y a jamais plus de $17'$ d'écart, on peut recom-
mettre de combien le \odot fictif avance ou retarde sur le véritable, et cela,
chaque jour de l'année. cela est inscrit dans la connaissance des Temps.
on obtient ainsi le Temps moyen, sur lequel sont réglés toutes les horloges de
Paris.

128. Pendant longtemps, les astronomes ont suivi cette méthode. aujourd'hui, on
en a adopté une autre, qui donne une valeur un peu différente à l'Équation du
Temps. Quand le \odot vrai arrive au Périgée, on fait partir le \odot fictif d'un
point de l'Équateur double distance à γ et égale à la distance de γ au Périgée.
De cette manière, les écarts sont un peu mieux répartis. autrefois, il y avoit $8'$
Retard max. et $2'$ d'avance, on a corrigé la différence en deux.

129. Le jour en astronomie est le jour solaire moyen, en prenant pour Unité
de Temps l'intervalle qui sépare deux passages successifs de ce Soleil moyen
au méridien.

C'est ainsi qu'on règle les horloges.

130. Cadres Solaires : pour déterminer le Temps Vrai.
 Equinoxial.
 Horizontal.
 Vertical.

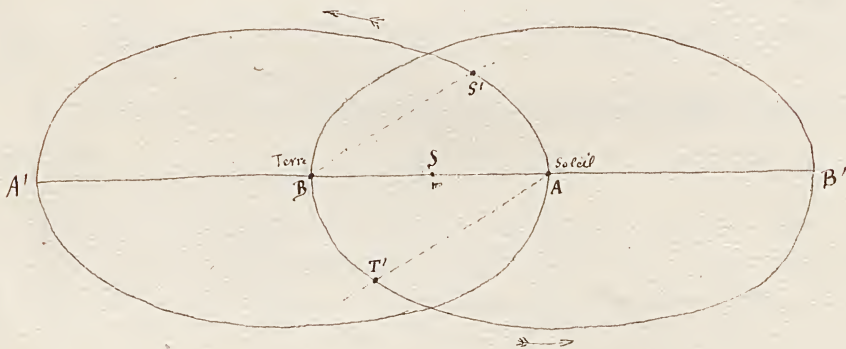
131. Un nouvel usage s'introduit depuis quelque temps, de servir des horloges de fer.
 on emploie dans tout une contrée la même heure. - En Angleterre, on a le
 temps moyen de Greenwich. - Bientôt en France, on prendra le temps moyen
 de Paris.

13°. Leçon.

132. Jusqu'ici, dans l'exposition de la théorie du \odot , nous avons parlé du mouvement apparent du \odot , et employé un langage figuré.

Il est facile de reconnaître que ce que nous avons dit du mouvement du Soleil peut se rapporter à celui de la Terre.

Nous avons dit que le Soleil se meut sur une Ellipse dont la Terre occupe un des foyers. - Il suffit de supposer que la Terre se meut sur une Ellipse dont le Soleil occupe un des foyers. - Traçons deux Ellipses égales, comme ci-dessous :



A est le Périgée, A' l'apogée dans la 1^{re} hypothèse.

B est le Périgée, B' l'apogée dans la 2^e.

Supposons que le \odot se meut, et arrive de A en S'. ou se verra de la Terre suivant BS'. - Supposons que la Terre se déplace, et vienne en T'. on verra le \odot suivant T'A. - Quelle différence peut-il y avoir entre ces deux Rayons visuels ? Ils n'aboutissent pas à la même étoile rigoureusement, mais ils sont parallèles. - Et, comme les étoiles sont extrêmement éloignées, il n'y a rien dans les phénomènes physiques qui nous permette de trancher entre ces deux hypothèses.

Cependant, dans ces derniers temps, Bessel, le 1^{er} à Königsberg, au moyen d'un grand héliomètre, est parvenu sur la 61^e du Cygne, à mesurer en réalité la différence entre ces deux mouvements. C'est pour les observations qui lui ont servi à déterminer la distance de la 61^e du Cygne à la Terre que Bessel a montré rigoureusement que c'est la Terre qui se meut autour du Soleil.

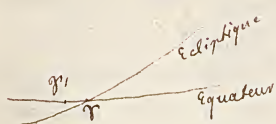
ainsi, il sera bien entendu désormais que, lorsque nous dirons : le Soleil se meut, nous parlerons seulement des apparences, parce qu'il n'y a de différence entre l'apparence et la réalité que pour une seule étoile.

133. Parlons maintenant de quelques perturbations que nous avons eues à signaler jusqu'ici.

la première est la Récession des Equinoxes.

voici comment elle se manifeste dans les observations, et comment elle a été découverte par Hipparche, 127 ans av. J. C.

Traçons l'Equateur et l'Écliptique. - Si, une année, vous déterminez le point d'intersection de ces deux cercles, \odot , et que vous observiez l'année



suivante, l'Equinoxe aura passé de r en r' , et aura rétrogradé vers la gauche. - Il recule de $50''$, par an. C'est une quantité très-petite, mais qui, s'accumulant d'années en années, produit des perturbations considérables. en 70 ans, elle est de 1° .

Nous recommandons que cet effet est dû à l'inclinaison de la Terre. Mais laissons les causes, ne nous occupons que des phénomènes. Depuis Hipparque le point r a reculé de 30° . C'était alors le Bélier qui était la première constellation zodiacale. C'est aujourd'hui les Poissons.

Il faut 25868 ans pour que le point Equinocial fasse le tour entier du ciel.

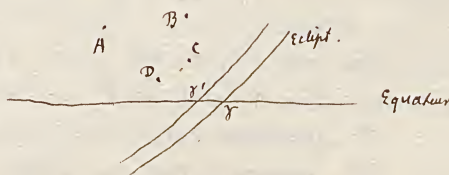
134. Pour nous occuper de la Cause, cherchons à découvrir les mouvements réels qui donnent lieu à cette apparence.

Il y a deux explications possibles :

1^o. L'Equateur reste fixe et l'Ecliptique rétrograde vers la gauche.

2^o. L'Ecliptique est fixe, et l'Equateur rétrograde.

Rien de plus simple que de trancher la question. - Considérons quelques étoiles A, B, C, D , et plaçons-nous dans la 1^{re} hypothèse, celle où l'Equateur serait fixe :



la distance des étoiles Écrites à l'Ecliptique changerait, et leur distance à l'Equateur ne varierait pas. - Dans l'autre hypothèse au contraire, les déclinaisons changeraient. - Il n'y a donc qu'à prendre des mesures exactes à 100 ans d'intervalle, et à comparer.

or, en faisant le calcul, on trouve que les distances des étoiles à l'Ecliptique ne changent pas : les déclinaisons varient. - Donc l'Equateur change de position, et recule son intersection avec l'Ecliptique, de façon que cette intersection recule chaque année $50''$. D'ailleurs, l'obliquité reste constante.

C'est donc un phénomène très-simple.

Pourquoi s'appelle-t-on phénomène de la Précession ? Cela peut étranger, mais le déplacement de l'Equinoxe étant de même sens que le mouvement diurne, le nouvel Equinoxe, le vrai, passera demain au méridien un peu plus tôt qu'aujourd'hui.

135. Comme conséquence, il faut que l'axe de rotation de la Terre se déplace dans l'espace, puisqu'il est fixe dans l'intérieur du globe, comme le prouve l'invariabilité des latitudes, démontrée par Bessel.

Quelle est la loi de ce déplacement ?

Si l'on élève une perp. au plan de l'Ecliptique, le point d'intersection de cette perp. avec la sphère s'appelle Pôle de l'Ecliptique. - Il est situé dans la constellation du Serpent. Cette perp. elle-même est l'axe de l'Ecliptique.

On représente le mouvement de l'Equateur terrestre en supposant que le pôle du monde décrit autour du pôle Π de l'Ecliptique un petit cercle de rayon $23^\circ 28'$ en 26000 ans. - Il reste fixe, mais le pôle de l'Equateur change de place dans le ciel. - ainsi l'étoile polaire qui se

Trouve actuellement à $10^{\circ} 41'$ Du pôle, n'en a pas toujours été ainsi s'approcher. Au temps D' Hippocrate, la Polaire actuelle était à 12° Du pôle. Elle s'en rapprochera jusqu'à moins de 1° Degré, et ensuite s'en éloignera beaucoup, de façon qu'elle ne sera plus la Polaire. Dans 14000 ans, ce sera α Delta Lyre qui sera à 0° Du pôle.

Il y a 4000 ans, époque De la construction Des grandes pyramides De Gizeh, le pôle était à $30^{\circ} 44'$ D' α Du Dragon.

Cette situation Du pôle à cette époque a donné lieu à une observation remarquable. La face Nord De ces différentes pyramides offre pour unique ornement Des passages légèrement inclinés à l'horizon que, en les supposant construits il y a 40 siècles, on calcule qu'il α Du Dragon, à son passage inférieur au méridien, devait se trouver Dans la direction Des p. Dragon. Cela était-il un effet Du hasard ? à quelle époque cela se produisait-il ? nous l'ignorons.

136. Pendant que nous y sommes, ajoutons que ce mouvement cosmique ne représente que le mouvement en gros. — Il est plus compliqué en réalité. le pôle P ne décrit pas un arc, mais une petite ligne sinuée qui s'incline tantôt à droite, tantôt à gauche De la même quantité $6''$.

En astronomie, on a l'habitude De séparer les phénomènes compliqués en deux autres plus simples, bien qu'en réalité il n'y en ait qu'un. — ainsi, on décompose ce mouvement De P en deux :

1°. Mouvement sur le cercle dont P est le centre.

2°. Mouvement sur une ellipse.

Le premier est la Précession, le 2°. la Nutation, qui s'accomplit en 18 ans $11/2$. Vous savez que c'est juste le Temps que les nœuds De la lune mettent à opérer leur révolution. — L'analogie a donc conduit à rattacher l'un à l'autre ces deux phénomènes.

Du Calendrier.

137. L'année doit être mesurée sur le Retour Du Soleil à l'équinoxe. c'est le Retour qui mesure les saisons.

Il faut donc compter l'année Depuis le passage Du \odot à l'équinoxe jusqu'à un passage suivant. la durée De l'année est un peu moindre que si l'équinoxe n'avait pas changé; il va au devant Du Soleil.

L'année ainsi mesurée s'appelle année tropique. — c'est l'année civile. Sa durée en jours solaires moyens est de

$$365^{\text{d}} 5^{\text{h}} 48^{\text{m}} 49^{\text{s}},7$$

ou

$$365^{\text{d}}, 2422 \text{ L}$$

c'est sur cette durée qu'il faut faire un calendrier.

Comme l'année est De 365^{d} et une fraction, il est impossible De faire une année d'un nombre exact et constant De jours.

Les Egyptiens faisaient l'année De 365 jours. on perdait chaque année un quart De jour. on finissait l'année trop tôt. au bout De 4 ans, on commençait l'année 1 jour trop tôt, au bout De 4 ans, 2 jours trop tôt. En

4 fois 365 ans, on avait mesuré D. Antikledphion. - En 365 ans, on commençait
3 mois trop tôt : les saisons étaient interrompues.

etc. etc.

Mois lunaire de 29 j. 12.

Jours complémentaires Des Romains.

Réforme Julienne. - Edit D'auguste.

Réforme Grégorienne.

14^e. Leçon.

138. Distance Du Soleil à la Terre.

Lacaille au Cap, & Lalande à Berlin. — quadrilatère facile à construire. — Calcul.

139. on en déduit la Parallaxe horizontale du Soleil, qui est 8", 57.

140. on en déduit la Distance : $D = 206265 : 8,57.r = 24000$ rayons terrestres, ou 12000 Diamètres. — Plus exactent. $D = 11992$ Diam. Terrestres.

Cela fait environ 36000000 lieues. (Diam. Terr. = 3100 lieues). — Plus exactent. c'est 38000000.

141. Le Diamètre Du ☉ s'en déduit.

$$\frac{\text{Diam. } \odot}{\text{Diam. } \oplus} = \frac{1920''}{17''/2} = 111,5.$$

D'où le volume.

Constitution Physique.

142. Nous avons dit que le Soleil est fixe au foyer des mouvements planétaires. Cependant, il tourne sur lui-même. — Comment a-t-on pu le reconnaître ?

Taches qui tournent de G. à droite. — Leur réformation.

Rotation en 25 j. $\frac{1}{4}$ d'occid. en orient.

Si Equateur solaire est incliné de $7^{\circ} \frac{1}{2}$ sur l'écliptique.

Une grande tache observée en 1769 et suivie jusqu'à 8 fois.

Toutes les Régions Du ☉ ne sont pas également fertiles en Taches. C'est surtout dans la Région tropicale, de 30° au-dessus et au-dessous de l'eq., qu'il y en a le plus. — embûche des poles, jamais. — Cela nous prouverait à l'avance qu'il y a dans les Régions tropicales du ☉ des mouvements parallèles à ceux de notre atmosph. — phénom. qui sont si fréquents près des Tropiques. — Cela prouverait aussi nous conv. d'être à penser que nous ne connaissons pas la vraie Nature De la Rotation Du Soleil, mais seulement cette Nature diminuée ou augmentée De la vitesse Des mouvements De l'atmosphère solaire.

Les Taches nous paraissent sous des aspects différents. Il y en a de divisées en deux ou trois par des traits lumineux. — Quelquefois, on leur donne une seule tache, on en aperçoit une file se suivant l'une l'autre. — Dans ces derniers cas on a vu une tache à queue, ayant la forme d'une comète.

Les Taches présentent toujours sur leurs bords une pénombre. — Et surtout la partie qui fait la pénombre est plus lumineuse que le reste du Soleil.

Les Taches disparaissent rapidement.

La grande tache de 1769. avait 17000 lieues de Diamètre. Car elle occupait un 20^e du disque, et le Diam. ☉ = 360000 lieues. — or elle a disparu en 6 semaines, ou 42 jours. Le mouvement de cette machine était donc très-rapide. Les matières avaient 17 lieues à s'élever pour se rejoindre. Le flux qui l'avait amenée avait été au moins aussi rapide.

Nous avons signalé la tache à queue, parce qu'elle prouve que non seulement les Taches Du ☉ ont un mouvement dans l'atmosphère, mais aussi un mouvement. Et Girardier. — tout indique donc de grandes fluctuations dans l'état matériel Du Soleil.

123. On a fait beaucoup d'hypothèses pour expliquer tout cela. Lalande supposait que le \odot est une mer de feu, et que qqf. par suite des marées qui envoient l'eau (on ne sait trop pourquoi) les pays situés au-dessous deviennent visibles. Les Taches étaient des Taches sous-marines. - Lalande se fondait sur ce que les Taches paraissent souvent au même point. - Mais comment l'eau montre-t-elle au bout de quelques années qu'une Tache est devenue à la même place? Nous ne connaissons guère la durée de la rotation. Il y a 5 h. de différence entre les observations des divers astronomes. En 100 jours, on peut se tromper d'une rotation.

124. L'hypothèse de M. Herschell (1800) a plus de valeur. - L'anneau du Soleil serait opaque et non lumineux par lui-même, et en général, nous ne le verrions pas. - Dans une atmosphère très-dense, non lumineuse. Mais une couche gazeuse peu transparente. Et enfin la Photosphère. Explication des phénomènes: les mouvements de la 1^{re} atmosphère déshydrateraient les deux autres.

Il ne paraîtrait pas que la matière lumineuse se borne à la Photosphère, mais qu'au-dessus il y a encore une matière très-rare. Car, lorsqu'on observe les éclipses totales de Soleil, toute l'atmosphère lumineuse ne disparaît pas: il reste encore autour de la surface de la Lune une portion du ciel éclairée d'une lumière assez vive, et qu'on appelle la Couronne. Comme il n'y a pas d'atmosphère dans la Lune, on est porté à croire que c'est une autre atmosphère du \odot . - Ce n'est pas la même chose que les langues de feu des montagnes lumineuses qu'on a aperçues, et sur lesquelles nous reviendrons.

125. Un autre phénomène fort curieux a été observé par Dominique Cassini: c'est la Lumière Zodiacale, qui apparaît dans le ciel à l'époque des Equinoxes. - Si à cette époque, quand le \odot est au zénith et que le ciel est pur, on regarde l'occident, il n'est pas rare qu'on aperçoive un fuseau lumineux qui s'étend dans le ciel à une distance très-considérable, et il est facile de démontrer géométriquement que si cette matière excessivement ténue appartenait au \odot , elle va jusqu'à la Terre. - à l'Equinoxe d'automne, la lumière se présente sous forme d'un fuseau placé horizontalement et précédant le lever du Soleil.

On a attribué la lumière Zodiacale à une atmosphère du \odot , très-ténue, et s'étendant à une distance prodigieuse. - Elle aurait une forme elliptique, et la Terre la traverserait aux Equinoxes; et alors, on en verrait l'épave, et elle deviendrait visible: - aux autres époques, on ne la verrait que par les franges, et on ne l'apercevrait pas. - cette matière serait distribuée suivant l'Equateur solaire.

15°. Secon.

Des. Planètes.

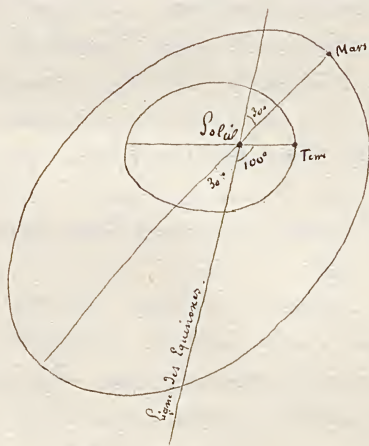
146. Dans l'Étude Des Planètes, nous Retrouverons les mêmes propositions que dans celle Du mouvement Du \odot . Car, en l'orbite, c'est la Terre qui se meut, en sorte que la Théorie Du \odot n'est autre que celle De la Terre, et à pour centre, d'une planète quelconque.

ainsi, nous avons prouvé que la Terre se meut autour Du \odot dans un plan passant par le centre Du \odot . — Il en est De même pour une Planète quelconque.

Mais tous ces plans ne coïncident pas entre eux, quoiqu'ils soient tous la plupart fort peu inclinés sur le plan De l'écliptique. — ainsi, l'orbite De Mercure n'est inclinée que De 2° . par rapport au plan De l'orbite De la Terre, l'orbite De Mars, De 1° ; celles De Jupiter et D'Uranus sont inclinées De quantités encore plus petites. Celle De Venus est la plus inclinée, ind. De 7° . C'est à cause De cette petite inclination que nous avons pu dire que toutes les planètes se meuvent Dans le même Sens.

147. Chaque Planète décrit une ellipse dont le Soleil occupe un Des foyers.

Néanmoins que les plans Des planètes ne coïncident pas entre eux, les axes De ces ellipses ne coïncident pas. — Les grands axes pourraient avoir une direction quelconque Dans le Ciel. ainsi, le Périgée De la Terre est



en 100° De la ligne Des Equinoxes, tandis que celui De Mars en est à 30° .

Ces ellipses n'ont pas toutes la même Excentricité, mais aucune n'en a une considérable.

Mercure	0,2	c'est la plus grande.
Venus	0,003	presque un cercle.
Mars	0,093	
Terre	0,017	
Jupiter	0,047	
Saturne	0,056	
Uranus	...	

La planète Noirs ayant une grande excentricité, Kepler a trouvé la nature du mouvement elliptique sur cette planète, d'après les observations de Tycho-Brahe. Les autres ne permettraient pas de résoudre la question avec autant de facilité. Mercure n'était pas bien connu, et l'est depuis peu (grâce à moi) : je doute que Tycho-Brahe en ait jamais fait une observation. Même Copernic, qui observait à Danzig sur les bords de la Vistule, et qui a beaucoup travaillé sur Mercure, n'a jamais raisonné, pour cette planète, que d'après les observations d'autres astronomes mieux placés que lui. Car Mercure est très près du Soleil et, à ces époques, on ne le voyait que près de l'horizon, à travers les branches : on n'avait pas de lunettes permettant de voir en plein jour.

148. Si on écrit par chaque planète en un jour sont d'autant plus grands que la planète est plus près du Soleil. La Terre en 1^{er} parvient en moyenne 7 lignes : les planètes plus voisines du S en arrivent plus.

149. Si nous faisons pour chaque planète le calcul que nous avons indiqué pour la Terre, c.à.d. si nous calculons la surface balayée par le rayon vecteur en un jour, nous trouverons que cette surface est constante, c.à.d. que nous retrouvons celle qui est l'Énoncé Technique et les aires décrites par le rayon vecteur sont proportionnelles au temps.

Seulement, ces aires balayées varient d'une planète à l'autre. 150. Il en résulte que si le plan de l'orbite d'une planète étant connu, ainsi que la position de cette orbite dans son plan, et celle de la planète dans cette orbite à un moment donné, on pourra déterminer pour tout jour sa position dans la suite des siècles.

Pour la discussion des observations, on connaîtra la position de surface balayée par la planète. - Si nous voulons la position de la planète 30 jours après, il faudra trouver de manière que le rayon vecteur ait décrit une surface 30 fois plus grande.

151. En principe, la position d'une planète dans le ciel est ainsi déterminée. Mais sa position apparente l'est-elle ?

Imaginons que le Soleil soit en S, et supposons un Mars apparent dans le ciel le 1^{er} Janvier 1855. Voyons quelle sera la suite des opérations.

L'astronome prend d'abord connaissance de l'obliquité du plan, et de la position de l'orbite dans ce plan. Puis, connaissant la position de Mars à une certaine époque, et la position de surface balayée en 1 jour, il pourra trouver la position de Mars dans son orbite. - Si par ex. on donne la position de Mars au 1^{er} Janvier 1800, il y a 55 ans : ce qui fait, jusqu'au 1^{er} Janvier 1855

(55 x 365 + 12 + 31) jours

(la course des 44 années bissextiles). -

on aura donc ainsi la position de Mars par rapport au Soleil : en joignant SM et voyant à quelles étoiles SM aboutit, cela donne la Position Héliocentrique de Mars.

Mais maintenant, où la planète Mars nous paraîtra-t-elle ? - Il faut faire le même calcul pour la Terre, et en déduire sa position au 1^{er} Janvier 1855. on joint alors TM, on prolonge jusqu'à la sphère céleste, et alors seulement, par cette longue suite d'opérations, on a la Position Géocentrique ou apparente de Mars.

La Ligne de la Terre est plus Simple que celle d'aucune autre planète. Car, pour Mars, après la position Héliocentrique, il faut encore trouver la position Géocentrique. Et cela complique la Ligne.

152. Encore bien que j'en aie pas l'intention d'entrer dans le détail de la détermination des éléments d'une planète, cependant, je puis dire qu'ils sont au nombre de Six, dont voici le Tableau :

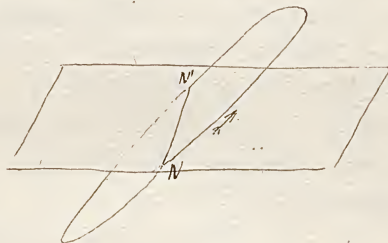
Position du plan .	{	Ligne des Nœuds Inclinaison	}	2	Conditions
Grande de l'orbite	{	Grand axe Excentricité	}	2	—
Position d'orbite	{	Angle du gr. axe avec la ligne des nœuds	}	1	—
Position de la planète	{	Position à une époque quelconque	}	1	—
Total				6	Éléments .

Nous ne parlons pas de la durée de la révolution, ni même pour avoir la longueur balayée : nous verrons qu'on la déduit du données précédentes.

Nous serons satisfaits de savoir comment on détermine ces éléments.

153. Supposons qu'il s'agisse de Mars.

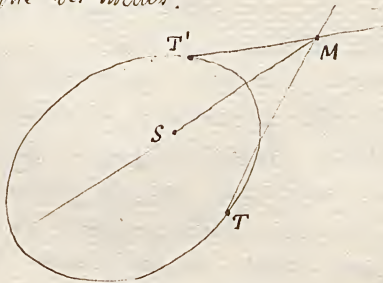
Soit l'Héliocentrique et l'orbite de Mars :



Position de Mars.

Définition : Ligne des Nœuds. — Nœud ascendant — Nœud descendant.

avant d'entrer dans le détail, on peut déterminer l'instant où Mars passe au Nœud. C'est une direction à observer. — En outre, il est facile de voir si c'est un nœud ascendant ou descendant. — Et maintenant, si, à deux époques différentes on observe deux fois Mars à son nœud ascendant, nous sommes certains qu'il est revenu à la même position dans le ciel. — Je dis qu'on peut en conclure la position de la ligne des nœuds.



Soit le Soleil en S et la Terre en T au moment où Mars M passe au Nœud ascendant.

joignons TM , puis, laissons couler les jours, jusqu'au moment où Mars Repasse au Nord descendant. La Terre est alors en T' et nous avons la position de M par l'intersection de deux lignes droites. Joignant SM , j'ai l'intersection de l'orbite de Mars avec le plan de l'ecliptique. - on peut vérifier par le Nord descendant. Or, plus, comme l'orbite est presque un cercle, on a déjà une idée de ses dimensions.

La Durée de la Révolution est connue en même temps, par l'intervalle entre deux Retours en M . - le temps pour aller de M en M' n'est pas égal à celui de M' en M : à cause de l'excentricité.

Quelle est l'inclinaison? - attendons le moment où la Terre est dans la ligne des nœuds. alors, Mars, la Terre et le Soleil déterminent le plan de l'orbite de Mars, dont on peut trouver la position.

Il faut maintenant déterminer la courbe décrite dans ce plan. - or, à un moment quelconque, si l'on joint TM , et si l'on détermine l'intersection de cette droite avec le plan de l'orbite de Mars, on a la position absolue de la planète. - on peut ainsi avoir plusieurs points de l'orbite, en trouver la nature, et vérifier les lois de Kepler.

On peut aussi opérer autrement.

Atabord, la Durée de la Révolution (790 jours) qui est connue, peut aussi se déterminer par l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux oppositions ou deux conjonctions. (à examiner).

Ensuite : on observe M : on voit TM . 790 jours après, M est revenu au même point du ciel. L'intersection de $T'M$ avec TM donne M . Joignant SP , on a un point de l'ellipse. - On a le grand axe et la courbe, par plusieurs observations de ce genre.

16^e. Leçon.

154. Nous avons vu que les grands axes sont indépendants les uns des autres pour les différentes planètes. Mais la 3^e. loi de Kepler lie leurs valeurs avec celles des périodes. — C'est celui qui lui a coûté le plus de peine, 17 années de recherches, et, ce qui est remarquable, il la supprima d'abord, mais un faut de calcul lui fit croire l'inexacte, et il n'y revint qu'après un long temps, pendant lequel il avait oublié sa faute de calcul. — Voici cette loi, qui n'est pas approchée comme celle de Bode, mais rigoureuse.

Prenez pour unité de distance dans le ciel la distance de la Terre au Soleil, et pour unité de temps la durée d'une année tropique. — Imaginons une planète dont le grand axe soit 4, une autre dont il soit 9 (Saturne), une autre dont il soit 16 (une peu au-dessus d'Uranus). — Dans tous la durée de la révolution, multipliera le grand axe par sa Racine carrée:

	1	4	9	16	25
Racine	1	2	3	4	5
Durée	1	8	27	64	125

Cette loi s'applique sans exception à toutes les planètes.

Les carrés des temps des révolutions sont entre eux comme les cubes des grands axes.

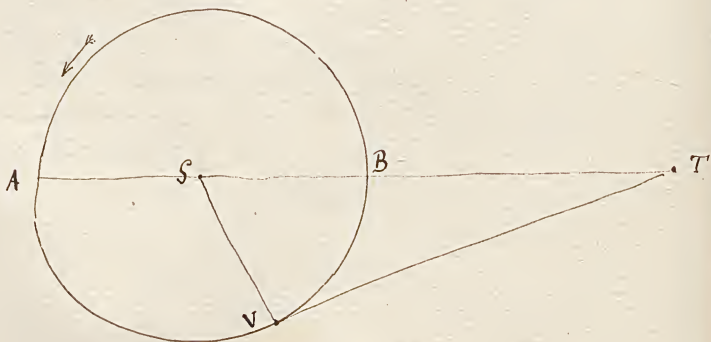
Voilà les données générales relatives au mouvement des planètes. — Nous allons parler de chacune d'elles en particulier.

155. D'abord, il y a deux planètes très voisines que nous de Soleil, Mercure et Vénus.

on les appelle Planètes Inférieures.

Les autres sont les Planètes Supérieures.

Cherchons les apparences que nous présentent leurs mouvements, dont nous connaissons les lois.



Soit en S le Soleil, en V Vénus, en T la Terre. ... en A, on ne voit plus Vénus: elle est en conjonction supérieure. — Mais ensuite on la voit paraître. En B elle est en conjonction inférieure. — Ors qu'une conjonction, Vénus est visible.

-loin du Soleil, elle est dans ses digressions, et, lorsqu'elle est le plus loin du Soleil, on dit qu'elle est dans sa plus grande Elongation. — des plus grandes Elongations de Mercure et de Vénus ne sont pas toujours les mêmes. Cela vient à l'embarras de l'orbite: dans leurs périhélie, elles sont plus près du Soleil que dans leurs aphélie, et cela se complique encore de la position de \odot de la Terre: quand celle-ci est plus près du \odot , et l'Elongation est plus grande.

La plus grande Elongation de Vénus est 47° — celle de Mercure, 29° . — Cela montre que son orbite est plus petite que celle de Vénus.

156. De ces mouvements résultent des phases diverses. — Je pourrais de Vénus: ces Mercure, étoile très-brillante, n'est presque jamais visible: les Rayons du Soleil et les Attributs de l'Horizon lui sont contraires.

157. Vénus a un disque apparent de $40''$: elle doit présenter des Phases, qui ont été aperçues par Galilée.

Explication de ces phases.

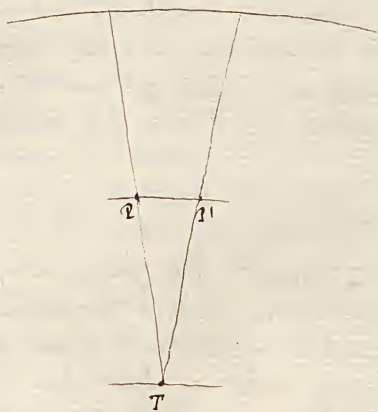
Mercure les présente aussi: mais elles ne sont pas nettes, à cause de son petit diamètre.

Il résulte de la grande Vénus des variations d'éclat? — Quand elle est à $40''$ d'Elongation, elle est la plus brillante. Cependant, elle a alors une forme d'épave. Mais une autre cause fait plus que compenser cet inconvénient: c'est qu'alors son diamètre apparent est plus grand qu'aux conjonctions supérieures, où elle est pleine, mais très-loin de nous. — En tenant compte de ces deux causes, on trouve un maximum d'éclat pour $40''$ d'Elongation.

158. La Parallaxe de Vénus à une époque qq. est égale à son diamètre apparent à la même époque. Donc les dimensions de Vénus et de la Terre sont les mêmes.

La matière de Vénus pèse $\frac{1}{3}$ de moins que celle de la Terre. — Nous y arrivons par la considération des actions de la Terre et de Vénus sur les autres planètes.

158. Nous avons parlé jusqu'ici des mouvements apparents rapportés au Soleil. — Parlons maintenant de ces mouvements rapportés à la Sphère céleste.



Soit la Terre fixe en T, et P une planète qui vient en P'. — Si la Terre se meut en sens contraire de la planète, le déplacement de celle-ci paraîtra plus grand. — Si elle se meut en dans le même sens, elle paraîtra avoir une vitesse plus petite, égale ou supérieure; de façon que la planète

pourrait aller même vite, ou s'arrêter, ou même rétrograder. Les apparences les plus diverses peuvent donc se manifester.

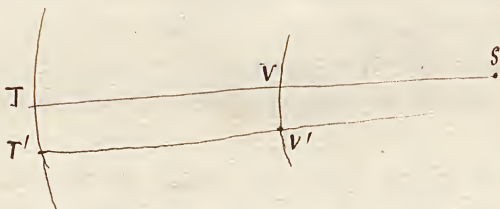
Cela s'appelle les Stations et Rétrogradations.

On en avait fait une objection à Copernic. — on avait recours alors, pour les expliquer, à la théorie des Epicycles.

159. Examinons ce qui arrive pour Vénus.

à la Conjonction Supérieure, le mouvement apparent de Vénus sur la Sphère céleste doit paraître plus rapide que si la Terre ne se mouvait pas, puisque les mouvements sont alors opposés.

Preons la Conjonction inférieure.



Soit T la Terre, V Vénus. Soient T' et V' leurs positions après 24 h. Si elle avait $TT' = VV'$, les rayons TV et T'V' seraient parallèles et, comme la Sphère céleste est à l'infini, Vénus n'aurait pas changé de place. Or les espaces sont d'autant plus petits que le plan est plus loin du Soleil. Donc $TT' < VV'$. — Donc le mouvement de Vénus paraît, mais dans son vrai sens, inverse de celui du Soleil : il y a rétrogradation.

(Entendons-nous bien : on est convenu d'appeler mouvement rétrograde tout mouvement s'accomplissant dans le même sens contraire du mouvement apparent du \odot , c'est-à-dire l'E à l'O.)

ainsi dans la Conjonction Supérieure des Planètes Inférieures, le mouvement est direct ; — dans la Conjonction Inférieure, il est rétrograde.

Mais il n'est pas difficile d'apercevoir qu'il n'est pas d'avoir nécessairement un instant où les planètes s'arrêtent, ne se meuvent pas du tout : — c'est en effet ce qui a lieu un peu avant et après, lorsque l'inclinaison compense la vitesse.

En conséquence, quand on trace sur une Sphère céleste le mouvement d'une planète inférieure, on a une orbite compliquée, telle que celle-ci.

160. Il y a quelques siècles, lorsque les lunettes n'étaient pas inventées, les particularités du mouvement des planètes, Vénus et Mars, ont été des causes d'objections au système Copernicien. — On disait : Toutes les fois qu'une planète supérieure passe entre le Soleil et la Terre, elle devrait produire une éclipse du \odot , et c'est ce qui n'arrive pas. — Cela vient de ce que les orbites des Planètes ne coïncident pas exactement avec le plan de l'écliptique. — L'orbite de Vénus est inclinée de $3^\circ \frac{1}{2}$ environ sur l'écliptique. Il peut donc arriver que, lorsque Vénus vient passer entre la Terre et le Soleil, la droite menée du centre de la Terre à Vénus fasse un angle de $3^\circ \frac{1}{2}$ avec l'écliptique, Vénus étant alors 2 fois $\frac{1}{2}$ plus près de la Terre que du Soleil, l'angle

Dela ligne TV avec l'Écliptique est $26^{\circ} \frac{1}{2}$ plus grand, ou $8^{\circ} \frac{3}{4}$.



$$VST = 3^{\circ} \frac{1}{2}$$

$$VTS = 8^{\circ} \frac{3}{4}$$

or le Rayon du \odot est de $16'$. Venus sera donc projetée en un autre point du Ciel.

Il n'est pas cependant nécessaire que la ligne qui va de la Terre à Venus soit dans le plan de l'Écliptique, ni soit perpendiculaire à l'Écliptique. — Je suppose que l'angle VTS soit $< 16'$, et pour cela, il faut que Venus ne soit pas à plus de $6'$ de l'Écliptique : car $6' (2 + \frac{1}{2}) = 15'$.

161. Kepler le premier, après les travaux de Mouret, se garda du premier, par un procédé particulier que nous verrons plus tard, à prédire un passage sur le disque du Soleil, pour Mouret, au commencement de Novembre 1631, et pour Venus, au commencement de Décembre 1631. Il pouvait se faire qu'il se trompât d'un jour, et il engagea les astronomes à vérifier.

Gassendi, au Collège de France, observa attentivement, en projetant l'image du \odot sur un écran blanc tendu dans une chambre noire. (Mouret, beaucoup plus tard, observait encore ainsi).

Il vit quelque chose, mais ne crut pas que ce fût Mercure, car il ne vit qu'un petit point, et lui croyait un diam. de $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{3}$ cm, comme c'était l'idée alors : la lunette manquant, l'observation amputait considérablement les diam. des planètes. — Il crut que c'était une tache du \odot , et pour pouvoir comparer plus tard la marche de Mercure, il releva avec beaucoup de soin la marche de la tache. — Or, on la voyait changer de place, et se mouvoir dans le sens rétrograde, comme le disait Kepler.

Les observations de Gassendi n'eurent pas tout le succès et la valeur qu'on aurait pu en attendre. Car un observateur qui, placé à l'étage inférieur, devait noter l'heure à chaque coup de pied de Gassendi, s'était ennuyé et était parti.

Cependant Kepler, qui vivait encore, eut la satisfaction d'apprendre que ses tables avaient donné la vérité.

Mais il mourut avant d'avoir pu assister aux efforts des astronomes pour observer le passage de Venus. — Ici, la prédiction fut en défaut, les tables n'étaient pas assez exactes. — Vous comprendrez en effet que, si la planète doit friser le bord supérieur, il faut éviter la plus légère erreur.

Gassendi observa en vain, et ne vit rien. — Kepler fut bien de ne pas vivre plus longtemps : car beaucoup de gens dénigraient ses Algèbres.

162. Le passage de Venus sur le Soleil sont devenus très-célèbres à cause de leur utilité.

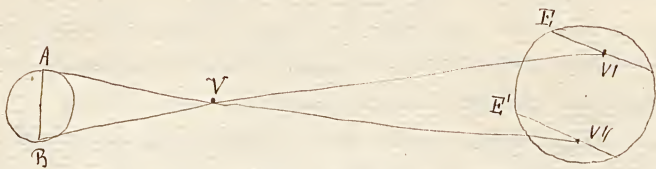
En 1677, Halley, ami de Newton, alla à St. Hélière pour observer le passage de Mercure sur le Soleil. Gravissant des difficultés pour déterminer l'instant du phénomène, Halley conclut que, puisque le passage dépend de la distance de la Terre au \odot , on pouvait en conclure cette distance, et, en y réfléchissant, il conclut que les passages de Venus sur le \odot donneraient une précision bien plus grande que ceux de Mercure.

à cette époque, la triangulation dont j'eus à peine pour mesurer la distance de la Terre au \odot était inadmissible: les instruments n'étaient pas assez précis: car les plus légers erreurs font qu'on se trompe beaucoup. donc à cette époque, la mesure pour les passages de Vénus sur le Soleil était indispensable. - voir Astr. - on a trouvé ainsi $17''{,}2$ pour la parallaxe du Soleil.

depuis, les astronomes de l'ap. de Rome. Espérance et ceux de Berlin ont trouvé pour le parall. de Lacaille $18''{,}2$. - Une seconde n'est pas une chose négligeable. on ne conceit pas que les instruments donnent cette erreur, et que la distance du \odot donnée par Vénus et par les observations angulaires directes ne donnent qu'une précision de $1/18$. - on se voit tenté de croire que, de part et d'autre, on a raison. Je n'oserais me prononcer.

163. Je vais vous faire comprendre comment les passages de Vénus sur le Soleil ont pu donner la distance de la Terre au Soleil.

Supposons deux observateurs situés aux extrémités d'un diamètre terrestre. C'est à peu près ce qui fut en 1769, où l'un observait en Finlande, tandis que Cook se trouvait à l'autre. - Ces deux observateurs ne virent pas la planète au même point du disque solaire.



Si nous joignons $V'V''$, la figure des mouvements de Vénus apprend que $V'V'' = 2 \frac{1}{2} AB$, puisque Vénus est à peu près 2 f. $1/2$ plus près de la Terre que du \odot . - Il est facile qu'on lie de la parallaxe du \odot , il faut de préférence mesurer $V'V''$ qui est 2 fois plus grand. On le trouve de $23''$. Si l'on divise par $2 \frac{1}{2}$, on trouve $17''{,}2$, et c'est la parallaxe, d'où l'on déduit la distance de la Terre au \odot . - Voilà le principe général.

Il y a en outre des difficultés et des avantages de détail.

Comment observer $V'V''$? C'est un petit calcul. Car, à une certaine époque conformationnelle, relative aux cercles horaires, A détermine la position de V' et celle de V'' , et, pour le calcul, on en tire $V'V''$. - Il y a là une cause de précision, puisque c'est l'inconnue multipliée par $2 \frac{1}{2}$ qu'on mesure. Et si l'on peut se tromper de $1/10$ de seconde, on ne se trompera pas plus sur $23''$ que sur $17''{,}2$: l'erreur relative est moindre.

Mais ce n'est pas tout, et l'on trouve moyen de déterminer $V'V''$ plus exactement que par des mesures angulaires. - Il suffit de substituer à la mesure de la distance des cordes parallèles EV' et $E'V''$ celles de leurs tangentes, et l'on voit que nous pourrions faire aussi bien sans \odot l'influence.

C'est un peu tout. La longueur des cordes se déduit d'un autre phénomène susceptible d'une très grande exactitude. - voir en effet comment se produit l'éclipse d'une planète sur le disque du \odot . - avec une lunette, on n'aperçoit pas l'instant précis où la planète arrive. On ne s'en aperçoit que lorsque la planète a touché le bord circulaire du disque du \odot et l'a effleuré de forme. Là, on ne peut pas observer. Mais il arrive un moment où les deux points lumineux se rejoignent, et l'on ne peut s'y tromper d'1 f.

C'est une observation susceptible d'une grande précision; il suffit d'avoir de bons yeux, une bonne lunette, et un chronomètre. — La planète s'approchant du bord occidental du \odot , le filet lumineux qu'elle laisse à sa suite va se rompre, c'est le 2^e contact intérieur pour Sobkow. à partir de ce moment, le phénomène est terminé, il n'y a plus rien d'intéressant: le 2^e contact extérieur n'est pas bon à grand'espérance, même pour la détermination du diam. de la planète, qu'on ne trouve pas bien de cette façon.

ainsi, à l'observation des cordes, on substitue celle des deux contacts. C'est que la rapidité du mouvement de la planète est connue, ainsi que son diam. et celui du \odot , et l'on en déduit la longueur de la corde bien plus exactement. ainsi, finalement, pour toute mesure à prendre, on a la suite du passage pour les deux observations.

C'est ainsi qu'en 1769 on a trouvé $17",2$ pour la parallaxe du \odot , et par suite, 12000 liam. terrestres pour sa distance à la Terre.

164. Le prochain passage de Mercure sur le Soleil aura lieu en 1861.

Le prochain passage de Vénus aura lieu en 1874; son autre en 1882. Le dernier est celui de 1769. — Il y en a deux de suite à 8 ans d'intervalle, mais il n'y en a plus pour un siècle.

165. Malgré l'exactitude apparente de ce procédé, une des causes d'incertitude provient peut-être des déformations du disque du \odot près de l'endroit où a lieu le passage, puisque nous avons vu disparaître des taches de 17000 liam. de diam. Une pareille tache aplatisait le \odot .

Planètes Supérieures.

166. Mars.

Petites planètes — 22 ou 23.

Jupiter.

Saturne.

Uranus.

Neptune.

Les 4 premières sont connues dès la plus haute antiquité.

Cérès fut découverte par Piazzi le 1^{er} Janvier 1801.

Uranus par Herschel en 1781.

167. Mars et Rouge, Saturne plombé, Jupiter brillant.

168. Comment a-t-on pu déterminer les distances et les diamètres réels?

à la distance 1, la Terre est vue du \odot sous un angle de $17",2$. — Grand Mercure passant le disque du Soleil, il apparaît sous un angle de $12''$. Cette grandeur ne peut être comparée à $17",2$: car alors Mercure est à une distance du \odot = 0,4 et à une dist. de la Terre = 0,6. Il doit donc paraître plus gros que s'il était à la Dist. 1. — C'est donc $7",2$ (calcul). — En son nom, pour se mesurer le diam. réel d'une planète, il faut multiplier son diam. apparent, vu du \odot , par la distance.

Si l'on veut avoir le diam. de Mercure en liam., il est de 1700 liam. — Le diam. apparent varie de $8''$ à $12''$, et c'est au diam. moyen qui correspond à peu près celui d'où l'on a déduit la distance.

Le diam. de Vénus s'élève jusqu'à $61''$ quand elle est en conjonction inf.

Celui de Mars varie de $4''$ à $19''$, et son diam. est d'environ 1600 lieues.

Celui de Jupiter varie de $30''$ à $46''$, et son diam. est de 35000 lieues.

Le diam. de Saturne est de 31000 lieues.

169. Mercure et Vénus offrent dans la partie brillante de leurs disques une lumière à peu près uniforme. On n'y trouve point de taches persistantes. — quelquefois, on a vu y voir des points brillants ou noirs, mais cela a été très fugitif. — Apprendant certains phénomènes dans les cornes de Vénus ont montré que sa rotation est de 24 heures, et de même pour Mercure.

Elles ont une atmosphère.

170. Mars, quand son diam. est de $18''$, est très-voisin de nous, et, au milieu de son aspect homogène général, certaines taches du disque offrent une forme verdâtre. — Elles sont parfaitement blanches, et ont de plus grandes dimensions: elles sont aux pôles de la planète. Puis, dans tout le reste, il y a des vagues et des luminosités qui trahissent très-bien: entre elles, sont des places verdâtres et jaunes. Les dernières sont peut-être des plaines creusées. Les autres sont des mers.

Deux circonstances viennent à l'appui de cette opinion.

Atabord, il y a des taches qui vacillent, et prouvent qu'il y a une atmosphère.

Ensuite, si ensemble des observations ont montré que la planète tourne sur elle-même en $24^h 37^m 23^s$ et que cette rotation se fait autour d'un axe qui passe précisément par les deux taches blanches. — Eau. Glaces polaires.

Donc, atmosphère. — Comparer avec la Terre ou le Soleil.

L'inclinaison de l'équateur est de 30° . — Saisons.

Les taches blanches varient comme les Arctiques de Mars.

Tout est comme sur la Terre.

17^e. Leçon.

171. Il y a dans les apparences du mouvement des planètes supérieures des différences résultant de leur position par rapport à la T. et au S.

Nobord, elles ne viennent jamais en conjonction inférieure.

Conjonction. - Opposition.

Donc les planètes supérieures peuvent avoir toutes les elongations possibles.

Ces planètes ont des Stations et des Rétrogradations.

aux oppositions, le mouvement est Rétrograde. - aux conjonctions, il est

Direct et plus Rapide.

D'après cela, on voit que leur mouvement apparent est assez compliqué.

Jupiter met 12 ans à faire le tour du Ciel. La Terre pendant ce temps fait 12 Révolutions. Jupiter fait 15° en 6 mois: toutes les fois qu'il s'élève, on le voit par la Terre, il Rétrograde. Cela arrive 11 fois en 12 ans. Il en est de même de Saturne. Mais sa Révolution dure 29 ans, il Rétrograde 28 fois dans ce temps. - Uranus en offre 80.

Il est bien clair qu'il y a Station dans l'intervalle.

Je n'insisterai pas: mais j'ai remarqué que l'axe de Rétrograde

est d'autant plus petit que la planète est plus lointaine.

172. Jupiter et les planètes plus éloignées n'offrent pas de phases sensibles. Car la Terre est tellement placée qu'elle aperçoit toujours presque toute la partie éclairée.

Mars seul offre des phases sensibles.

173. Le diam. de Jupiter varie de $36''$ à $40''$

Celui de Saturne est d'environ $18''$

" Uranus " $2''$

" Neptune " $2'' \frac{1}{2}$ à $3''$

174. Les planètes supérieures voisines offrent même des accidents de lumière.

Pour Jupiter, qui, dans les annales, a un diamètre considérable, il présente des bandes qui s'évanouissent avec le temps, mais qui existent toujours. - Or, si cela, on y voit des taches noires qui se déplacent très rapidement, et passent d'un bord à l'autre en 9 heures. - Rotation, en $9^h 55^m 30''$.

Jupiter fait 2 rotations $\frac{1}{2}$ en un jour: C'est-à-dire d'autant plus remarquable que Mercure, Vénus et la Terre tournent en 24 h. et que Saturne tourne en $10^h 29^m 17^s$.

Voilà donc deux grosses planètes qui se distinguent par une rotation très Rapide.

Après, leur axe est perp. au plan de l'écliptique et la direction des bandes.

aplatissement. - Pour Jupiter, l'axe polaire: l'axe équatorial :: 100:107. L'aplatissement est $1: \frac{107}{100}$. - calcul, avec la Terre.

Saturne est aussi très-aplatis.

Quant aux autres planètes: Vénus doit avoir un aplatissement à peu

proportionnel à celui de la Terre, $\frac{1}{200}$. Mais on ne l'a pas mesuré.

175. Existe-t-il sur les planètes des êtres organisés? - C. douteuse. - 3 espèces à considérer: atmosphère, température, gravité.

Quant à l'atmosphère. - Les bandes de Jupiter sont des

nuages entrainés. — Si l'on observait la Terre De Loin, on verrait près des
côtes d'Afrique les nuages emportés par les vents alisés.

La Radiation Noire est 7 fois plus grande sur Mercure que sur la Terre.
Sur Uranus, elle est 200 fois plus faible.

Pour Mars, la gravité est moitié de g; pour la Lune $\frac{1}{6}$ g.

18. Leçon.

176. Rappel à l'étude Des Satellites Des Planètes.

De la Lune.

177. La Lune est dans le même cas que les autres planètes, sinon qu'elle tourne autour de la Terre et éprouve quelques perturbations que nous supprimeons d'abord.

Elle circule dans un plan passant par le centre de la Terre. Elle décrit une ellipse dont la Terre occupe un foyer, et le rayon vecteur, dans un jour, décrit toujours la même aïre.

Mais ne comprendrons pas sur ces lois. - Je vais vous indiquer seulement ce qui est différent, et vous verrez que pour étudier la marche de la Lune et pour la théorie, on peut employer les mêmes moyens que pour le Soleil.

Le diam. apparent étant sensible, ses variations peuvent nous servir à trouver celle de la distance.

178. Nous ne comprendrons pas sur ses Phases.

Lune nouvelle. - Pleine lune. - Syzygies - Quartiers. - Octans. Lumin. Cendrie des Octans. - Pour savoir l'ordre de la lumière, il faut savoir que le diam. de la lune est les $\frac{3}{11}$ de celui de la Terre, et que le diamètre de la Terre est à l'axe de la Lune.

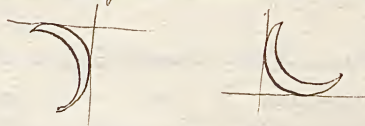
La lumière cendrie est maxima à la nouvelle lune.

179. avec un micromètre, on constate que le disque apparent de la lune est circulaire. Je ne suis pas sûr qu'elle soit sphérique: probablement non; mais nous n'en savons rien, parce que nous n'en voyons jamais qu'un côté.

Le diam. moyen est de $31' 7''$.

Quand on observe à la lunette méridienne, on peut observer le passage d'un bord: on conclut le passage du centre en ajoutant ou retranchant.

En outre, comme le croissant va d'une extrémité à l'autre, il y a toujours moyen de mener une tangente verticale et une perpendiculaire:



J'ai la possibilité de faire la précédente observation, ainsi que celle de la distance zénithale du centre.

180. On trouve ainsi que le plan de l'orbite est une grande arche de la sphère inclinée de $5^\circ 41' 48''$ sur l'écliptique.

Nœud ascendant \odot

Nœud descendant \oslash .

181. on vérifie les lois du mouvement de la lune comme celles du mouvement du \odot .

182. Le gr^2 axe est 59 fois (59,9643) le diamètre de la Terre.

à excentricité 0,055. - Le grand axe a été trouvé pour une ellipse.

- lation, par l'observatoire de Berlin et l'observatoire au cap de Bonne-Espérance.
 183. Le mouvement de la Lune dans son orbite est très-rapide. Sa révolution
 11 accomplit en $27^d 7^h 43^m 11^s$, environ $27^j \frac{1}{3}$. - c'est la durée
 de la révolution Sidérale, comptée à partir des Étoiles.

La révolution comptée par rapport aux phases et plus longue: le mois
 Synodique est de $29^j \frac{1}{2}$. - Explication. -

Inégalité de la Lune.

183. J'ai dit que l'orbite de la Lune est plane, ou à peu près. - Si l'on
 répète l'observation au point de vue de deux ou trois ans, on trouve que le plan a
 éprouvé de petites variations, on l'estime toujours incliné de 5° sur le plan de l'écliptique.
 La variation est très-régulière. La ligne des nœuds rétrograde, et
 effectue sa révolution en 18 ans, 6 : ou plus exactement. 6793, 39.

C'est un fait tout pareil à celui de la précession des Équinoxes.

On peut donc, connaissant la position du plan à une certaine époque,
 la calculer pour une autre époque.

184. L'orbite varie aussi dans son plan, tout en conservant la même excentricité
 et les mêmes dimensions. - Le mouvement, toujours de même sens, est
 tellement rapide qu'en 9 ans (3232^d , 5773) le périhélie et l'apogée
 sont revenus à la même place. - Et il est bien de remarquer que, tandis
 que la ligne des nœuds va en rétrogradant, le périhélie a un mouvement
 direct.

C'est donc un calcul de plus encore à faire pour trouver la position de
 la Lune à une époque donnée.

185. voici les opérations à faire pour cela :

Traversons le plan de l'écliptique et la ligne des Équinoxes Tg. - Il nous
 faut d'abord trouver le plan de l'orbite lunaire. Soit Tg la ligne des nœuds
 à l'époque t. Je la ferai rétrograder à raison de $3' \frac{1}{2}$ par jour, et
 moment pour la nouvelle position un plan incliné de 5° sur celui de l'éclip-
 tique, j'aurai le plan de l'orbite. - Nous connaîtrons le périhélie pour un
 calcul analogue. on trace une ellipse, et l'on aura l'écart aux surfaces
 calculées.

Après avoir traduit ces constructions en calcul, on traduit les formules
 en tables.

186. La distance de la Lune à la Terre est de 60 Rayons terrestres, par les
 conclusions des observations de Berlin et du cap Good-Hope.

À cette occasion, on a l'habitude de dire que si le centre de la Terre
 était au centre de la Lune, la Lune ne serait qu'à la moitié du Rayon.

187. Le diam. de la Lune est les $\frac{3}{11}$ de celui de la Terre.

Comment cela-t-il se trouve ?

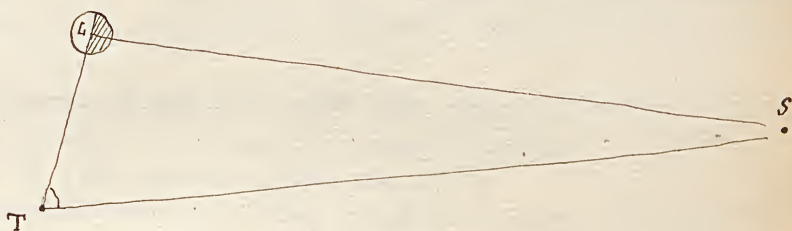
On suppose que la distance est 60 r, et que la Lune est aperçue du
 centre de la Terre sous un angle de $31'$. Inscrivons dans cet angle, à la
 distance de 60 r, un cercle, ce sera la Lune.

Les volumes sont entre eux :: $27 : 1331$; le Rayon est $\frac{1}{49}$.

Donc, par d'autres considérations (Mutation et précession), on trouve
 que la masse de la Lune est $\frac{1}{80}$ de celle de la Terre - donc la Lune ne pèse
 pour ainsi dire que la Terre.

188. ayant tracé la figure précédente avec exactitude, mais n'empêchant de mener les tangentes à la terre pour le Centre de la lune. on trouve aussi que, pour un habitant de la lune, la terre apparaît sous un angle de 10 p. près, pour lui la terre est un globe énorme, qui doit lui envoyer beaucoup de lumière, et par conséquent la lumière rendue est si vive.

189. Soit la terre en T, et considérons l'époque où la lune apparaît sous la forme d'une demi-cercle. - le soleil est en S. - Si, par le centre de la lune,



on mène une perp. à la ligne de séparation. D'ombre et de lumière, elle passera en S. Dans le triangle rectangle TLS, l'angle T est connu. Donc on peut construire un triangle semblable, et comparer TL à TS. - Les anciens, en faisant cette mesure, avaient trouvé que le O est 70 p. plus loin que la lune. Ce n'était pas assez; c'est 200 fois. Mais c'était beaucoup. Avant, on avait dit que le soleil était gros comme le Peloponnèse. - La difficulté est de bien saisir l'instant de la quadrature, et d'avoir l'angle en T.

190.

L'inclinaison de la lune autour de la terre produit des éclipses de O et de la lune. - Les éclipses ne se produisent pas à toutes les conjonctions ni à toutes les oppositions. - Il y aurait éclipse à toutes les lunaisons si l'orbite lunaire n'était pas inclinée sur l'écliptique. Mais c'est seulement quand la lune est dans le voisinage de ses nœuds qu'il peut y avoir éclipse.

Or les anciens avaient déjà remarqué que

$$223 \text{ Revol. Synod. de la lune} = 6585^d, 32 = 18 \text{ ans } 10 \text{ jours.}$$

Il enlève on trouve aussi que

$$19 \text{ Revol. Syn. du soleil} = 6585^d, 78.$$

C'est-à-dire qu'à moins d'un demi-jour près, la lune et le soleil, en 6585^d, parcourent ensemble d'une conjonction avec O et y reviennent. Dans l'interval, il y a eu 223 lunaisons de O et de C, et 19 de C et de S. - Donc, après cette période, les éclipses doivent recommencer dans le même ordre, et c'est ce qui arrive.

Cela n'avait pas échappé aux anciens, et les Chaldéens avaient appelé cette période la Période Soles. - C'est ainsi qu'ils prédisaient les éclipses.

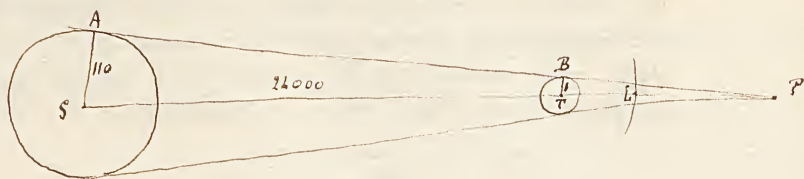
Mais il y a cependant une petite erreur. - Et d'ailleurs, les inégalités de la lune et les perturbations de l'orbite terrestre empêchant la précision. - On ne peut prédire ainsi que les éclipses totales. Des éclipses d'une durée pourraient bien se produire dans la période suivante.

Durant cette période, il y a 79 éclipses, 29 de lune, 41 de soleil (l'un ou l'autre). - on voit que celles de O sont plus fréquentes.

Dans une même année, il peut y avoir au plus 7 éclipses. - Il peut n'y en avoir que 2, et alors, c'est de O.

On ne peut pas ici que des éclipses observées sur toute la terre. - Mais

Il y aurait encore d'autres considérations pour les éclipses visibles d'un point donné.
 191. Cherchons les conditions qui doivent être remplies pour que l'éclipse soit possible.
 Pour les Eclipses de Lune, il faut que le cône d'ombre aille jusqu'à la lune.



on trouve $TP = 218$. or la lune est distante de 60. donc 1°. d'ombre de la Terre va jusqu'à la lune.

2°. Examinons si, à la distance 60 la largeur de l'ombre est assez grande pour que la lune y puisse disparaître entièrement. De T en P, il y a 158, de T en B, 218. or $\frac{158}{218} > \frac{3}{11}$.

Donc la lune peut être plongée entièrement dans le cône d'ombre.

Toujours les éclipses de Lune, qui sont visibles partout (sur une moitié de la Terre) et partant font intéressantes, ne sont pas susceptibles d'une grande précision à cause de la pénombre. — Lorsque la lune arrive dans la pénombre, son éclat s'éteint peu à peu. Lorsque elle vient dans l'ombre pure, la portion qui se trouve d'un côté disparaît, l'autre est de moins en moins éclairée. Lorsque est tout entière dans l'ombre pure, on s'aperçoit de nouveau avec une teinte rougeâtre : mais c'est un effet de contrastes. — avec une lunette, on s'aperçoit toujours, même dans l'ombre pure. La teinte rougeâtre vient de l'atmosphère de la Terre. — Car en tenant compte de la réfraction de $1^{\circ} 6'$, on trouve que le point de courbure des rayons ne va pas jusqu'à la lune; ainsi n'est-elle pas éclipée totalement, et on ne la perd pas même dans une lunette.

on ne peut rien voir de là pour la figure du mouvement de la lune.

19. Leçon.

192. Les Eclipses de Soleil sont produites par l'interposition de la Lune entre le Soleil et la Terre. - Elles sont analogues à celles de Lune, mais il y a des différences. En effet, les éclipses de Lune résultent de l'antantissement d'un flambeau, celles de Soleil, de l'interposition d'un écran. Donc les premières sont visibles pour tout le monde, et les autres ne sont vues que de certaines personnes. Car, quand on est dans une chambre, personne n'en voit plus : si l'on met simplement un écran, certains personnes la voient encore.

Il peut arriver que le centre de la Lune ne passe pas sur le centre du Soleil : l'éclipse est alors partielle. - On la mesure par la partie du diam. du \odot éclipsée. on le partage en 12^{es} qu'on appelle des doigts.

Mais il peut arriver aussi que le centre de la Lune se meuve directement vers le centre du \odot . - Eclipses totale. - annulaire.

Comme le diamètre moyen de la Lune diffère un peu de celui du \odot , la question ne peut se faire à priori : si l'un et l'autre cas peuvent se présenter : car le diam. de la Lune est le plus petit quand elle est à l'apogée, et le plus grand quand elle est au périhélie. - Il en est de même pour le diam. du \odot .

193. Examinons à quel se présente dans les deux cas.

Supposons d'abord qu'au moment de l'éclipse, la Lune soit apogée, et le \odot au périhélie. La Lune paraîtra sur le Soleil comme vaine, et l'on aura successivement les apparences suivantes :



c'est l'éclipse annulaire.

Pour la Lune, le phénomène du rapprochement des cornes est plus compliqué que pour Venus : leur réunion ne se fait pas par suite d'un avancement progressif. Il y a des irrégularités. - Cela vient de ce qu'il y a des montagnes de 2 lieues dans la Lune, $\frac{1}{100}$ du diamètre.

Enfin, le phénomène inverse se produit.

194. Dans le cas contraire, où l'éclipse est totale, on peut observer à la vue simple Mercure, Venus, et les principales étoiles. - Effroi des annulaires. - alors, autour du disque de la Lune apparaît une couronne assez brillante formée d'une lanière blancheâtre continue, et tout à fait pareille au crépuscule du soir. - on aperçoit souvent des gloires, c'est-à-dire des rayons divergents.

on se fait pas trop à que c'est que cette couronne est une atmosphère du \odot ou une de la Lune ?

Montagnes de la Lune. - on se fait à que c'est ?

195. différences qui existent entre les aspects d'une éclipse pour les différents observateurs. - à la surface de la Terre.

196. Pour les habitants de la Lune, il y a éclipse de Terre quand nous avons éclipse de \odot .

197. Eclipses d'étoiles, ou occultations. - l'étoile paraît disparaître en touchant le bord éclairé ou le bord obscur. - Dans le 1^{er} cas, c'est le bord obscur qui va en avant : dans le 2nd, c'est le bord éclairé.

Lorsque l'on voit le Bord occultant, il n'y a pas de surprise. - autrement, le phénomène est subit, et cela prouve que les étoiles n'ont pas de diamètres apparents appréciables.

Dans les occultations d'Aldebaran, on voit quelquefois l'étoile s'arrêter quelques instants sur le Bord, puis disparaître, puis s'apparaître... cela s'explique par les anfractuosités de la lune, dont les bords ne sont pas parfaitement réguliers. - Les accidents sont le plus souvent considérables que ceux de la Terre.

Étoiles.

198. absence d'air et d'atmosphère.

199. la Terre reçoit de la chaleur de la lune. - La pleine lune dissipe les nuages, c'est un fait météorologique constaté. - cela suppose que la lune s'échauffe les nuages.

200. Lorsqu'on voit une Tache de la lune pendant le cours d'une éclipse, une des montagnes centrales par exemple, on se frappe de la voir rester au même endroit, et la configuration de la lune reste toujours la même. - Hévélius et d'autres nous ont laissé des Cartes Lunaires identiques aux cartes actuelles.

Nous n'avons donc jamais vu et nous ne verrons jamais l'autre face de la lune.

Par la même raison, s'il y avait des habitants dans la lune, l'aspect de la terre ne serait pas le même pour tous: ceux du Σ centre la verraient à leur Zénith, ceux des bords, à l'horizon, ceux de l'autre Hémisphère ne la verraient jamais à moins d'un voyage.

C'est là la preuve que la lune, en tournant autour de la terre, présente aussi sur elle-même deux faces.

Comprenons bien cette conséquence. - Soit un corps travers d'une flèche. Si la direction de cette flèche ne change pas à mesure que le corps change de place, il n'y a qu'un mouvement de Translation: si elle change, il y a Rotation... La conséquence est facile à voir pour le mouvement de la lune. Voici la lune. Traçons une flèche en point central, que l'on aperçoit

(Y) A

B (X)

(T)

aujourd'hui au Centre. Si la lune n'avait qu'un mouvement de Translation, cette flèche serait bientôt vue au Bord. - Quand la lune est venue de A en B, il paraît donc qu'elle ait tourné d'un quadrant.

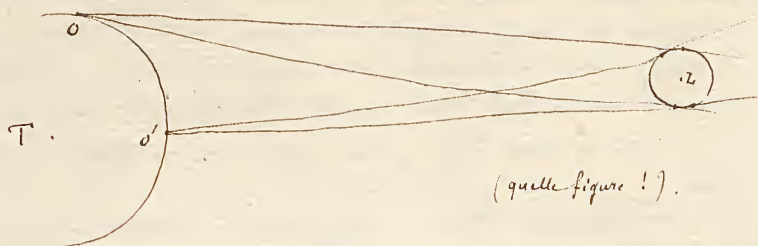
201. Cependant, j'ai dû ajouter qu'il y a un petit mouvement oscillatoire qui fait que les Taches des bords apparaissent et disparaissent, de sorte que l'on aperçoit plus de la moitié du disque.

En effet, comme conséquence de ce fait que la lune présente toujours la même face, nous venons de voir qu'elle exécute un mouvement de Rotation sur elle-même. - Or l'observation a montré que, tandis que le mouvement de la lune autour de la terre est linéaire, son mouvement de Rotation est irrégulier, comme celui de la terre. - Donc ces deux mouvements ne se peuvent composer exactement, et l'on doit voir plus de la moitié de la lune.

Ce phénomène porte le nom de Libration en Longitude.

202. Il y a une autre cause qui nous fait apercevoir un peu plus de la moitié de la lune: c'est le voisinage de la terre et sa Rotation. - Considérons un observateur placé en O, et ayant la lune à l'horizon: il nous faudra, pour voir la portion visible, mener deux tangentes. - 6 heures après, l'observateur va venir en O', et aura la

Lune à son Apside. - Deux nouvelles tangentes menées nous montrent qu'on aperçoit alors une nouvelle portion de la surface Lunaire.



c'est la Libration Diurne.

203. Enfin il y a une 3^e. Libration qui dépend de la position de l'axe de Rotation de la Lune par rapport à l'Ecliptique. - Elle porte le nom de Libration en Latitudes.

204. Après ce qu'on sait à-peu-près sur les Satellites de Jupiter, on serait en droit de croire que cette loi de la Rotation de la Lune s'applique en même à la Révolution appartenant à tous les Satellites. - on en a cherché les Causes. - on n'en a trouvée dans un défaut de Symétrie du Disque Lunaire. - la Lune serait oblongue, et plus dense du côté de la Terre. - l'explication serait alors très simple, et semblable à celle du pendule.

L'analyse a montré que il suffirait que pendant quelque temps la Lune ait eu une rotation sur elle-même pour que cette circonstance se soit perpétuée.

Etude des autres Satellitaires.

205. Mercure, Vénus et Mars n'ont pas de Satellites.

Jupiter en a 4

Saturne 8

Uranus 6 (peut-être)

Neptune 2.

206. Pour les planètes entourées d'un grand nombre de Satellites, ils forment un Système tel que en miniature. - on pourrait donc les étudier sous le rapport de leurs mouvements.

Cela a été fait pour les Satellites de Jupiter qu'on connaît depuis Galilée. Depuis, on les a étudiés avec beaucoup de soin, d'autant plus que leurs éclipses donnent beaucoup de précision aux observations.

Tous les quatre circulent autour de la Planète dans le même sens que la planète autour du Soleil, dans des plans passant par le centre de la planète, et très peu inclinés sur l'équateur de Jupiter.

	I	II	III	IV	(D'après une observation)
Inclinaison	6"	1'	5'	24'	

Leurs mouvements sont elliptiques. Mais comme l'aplatissement de la planète est si minime, qu'on n'en a remarqué que dans les derniers temps, ainsi, on peut dire sans erreur sensible que ces orbites sont des cercles au centre desquels la planète est placée.

Les deux premières lois de Kepler sont observées.

La 3^e. l'est-elle ? - Nous n'avons pu le voir pour la lune, puisque la terre n'a qu'un satellite. - Or, si Ray. Jupit. = 1, on a

	Temps Des Revol.	Distance
I	1 ^d 18 ^h	6
II	3 13	9,6
III	7 4	15,4
IV	16 17	27

La 3^e. loi de Kepler est satisfaisante, ainsi on déterminait la distance de 3 satellites de celle du 4^e en supposant connues les durées des révolutions.

207. Ces satellites sont très-petits. Cependant, avec d'excellents télescopes, on peut mesurer leur diam. qui est d'environ 1". on connaît leur distance à la terre, on en conclut leur grosseur.

I	1000 lieues de Diam.
II	400 "
III	1300 "
IV	1100 "

or le Diam. de la lune est de 800 ou 900 lieues. on voit donc que ces satellites sont comparables à la lune pour la grosseur: mais ils sont très-petits par rapport à Jupiter. - Ces quatre lunes paraissent à la surface de Jupiter à peu près comme la nôtre.

208. Quelles sont les apparences que nous présentent ces 4 satellites pour Jupiter?

Jupiter est plus gros que la terre et plus près qu'elle du \odot . Et si par conséquent l'ombre lui est en partie étendue, qui va beaucoup plus loin que l'orbite du 4^e satellite. - Si nous nous rappelons que les plans des orbites des satellites sont fort peu inclinés sur l'équateur, nous ne serons pas étonnés que les 3 premiers s'éclipsent réciproquement. - le 4^e s'éclipse aussi presque à chaque révolution. - Mais quelquefois il brise l'ombre et ne passe que très-pu de l'ombre invisible.

ainsi les éclipses sont l'état habituel de ces satellites.

Lorsqu'un satellite vient se placer entre le soleil et la planète, il doit produire une éclipse de \odot , ce qui en fait une tache les 42 heures. - Ces éclipses sont très-fréquemment totales, car, pour Jupiter, le \odot apparaît sous un angle de 6'. - Les 3 premiers satellites ont pour lui un diam. plus grand que le \odot , et le 4^e aussi très-souvent. - l'éclipse n'est pas longue, parce que le mouvement des satellites est très-rapide.

Indépendamment de ces phénomènes, il y a une 3^e. spectacle extrêmement fréquent. C'est que ces satellites s'éclipsent les uns les autres. Ces éclipses indiquent bien le sens dans lequel se meuvent les satellites. autrement, on ne sait pas si un satellite est devant ou derrière la planète.

209. arrivons maintenant aux apparences vues de la terre.

Prenons le 1^{er}. satellite se rapprochant de l'ombre. à un certain moment, il disparaît. - Il y a deux causes à cette disparition, soit parce qu'il est dans l'ombre, soit parce qu'il est derrière la planète. Quand il sort de

l'ombre, il se peut qu'on ne le voie pas. — c'est ce qui arrive souvent pour le premier Satellite. — Quand il passe au contraire devant la planète, on peut le distinguer avec une très bonne lunette quand il passe sur les bandes obscures de Jupiter. Mais il y a un autre moyen plus commode de le voir; il peut projeter sur la planète une tache noire qui le précède en marchant aussi vite que lui, et c'est ainsi qu'on peut suivre sa marche.

Pour le 2^e Satellite, qui est très-brun, on peut le voir entrer dans l'ombre et en sortir du même côté de la planète.

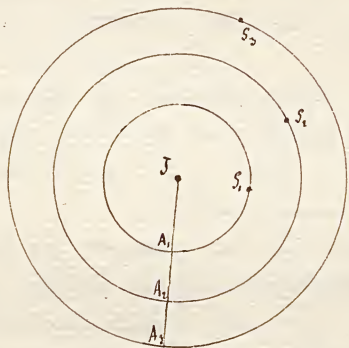
210. Les phénomènes ont été d'une grande utilité soit pour l'avancement des théories astronomiques, soit pour le calcul des longitudes.

211. Ces Satellites paraissent par genre

I	9°	} pour Jupiter.
II	4°	
III	2°	

Les vitesses sont très-remarquables : la Vit. du 1^{er} = 2 f. la Vit. du 3^e = 3 f. et. du 2^e. Quand on prend exactement les durées des Révolutions, on trouve cette loi rigoureuse. — Il y a une cause qui a produit cela.

Mais ce n'est pas tout : voici les vitesses des 3 Satellites :



Menons une droite parallèle à la ligne des Equinoxes, et comptons les longitudes à partir de cette ligne. — on a

$$A_1 S_1 + 2 A_2 S_2 - 3 A_3 S_3 = 180^\circ$$

ou

$$l_1 + 2 l_2 - 3 l_3 = 180^\circ.$$

Entendons-nous bien : je n'ignore pas que $l_1 + 2 l_2 - 3 l_3$ soit constant, mais non que la constante soit 180° .

Les Géomètres se sont beaucoup exercés là-dessus. Nous ne savons pas la cause de ces Rapports mystérieux. On n'est arrivé qu'à une ébauche, savoir que si cette loi avait été à peu près vraie dans l'origine des Temps, elle a pu devenir exacte par suite des actions mutuelles des Satellites. — Cela explication jusqu'à un certain point : car s'il a été à peu près, il peut être devenu exact à des circonstances fortuites.

Il résulte de là que jamais ces 3 Satellites ne peuvent être éclipés à la fois par l'ombre. — Par ils peuvent être tous cachés par la planète. Cela a été vu en 1682, 1780, 1802, 1806 et 1846 : Jupiter n'avait plus 3 Satellites.

21^e. Leçon.

212. Les éclipses D. Jupiter ont montré que la lumière ne se met pas avec une vitesse infinie comme l'attraction.

Déjà Descartes avait remarqué que, dans les éclipses De Lune, il devait y avoir certains retards provenant De la lumière. Mais la terre est trop près De la Terre, et les éclipses ne peuvent être observées avec précision.

Emploi Des Sabellies De Jupiter.

La lumière met $8' 17''$ pour venir Du O à la terre. Rameau avait trouvé $8' 13''$.

Cela fait 70000 limes par seconde: 10000 f. plus vite que la terre dans son orbite.

213. De ce que la vitesse De la lumière n'est pas infinie, il en résulte Des différences De position pour les astres.

Considérons le cas où un astre serait en mouvement et la terre en repos. Soit T la terre, S l'astre. Supposons qu'à midi un rayon parte De S et se dirige vers la terre, et supposons que ce rayon mette $10''$ à arriver à la terre. Il arrivera à midi $10''$, et nous verrons le rayon à cette heure dans la direction D'où il est parti. Nous verrons l'astre en S, il sera en S'. - ainsi nous voyons un astre dans la position qu'il occupait avant l'époque De l'observation. Nous ne voyons jamais le O à sa place, il est toujours un peu plus loin. Or, en $8' 17''$ le O parcourt $20''$ $\frac{1}{2}$: mais la différence n'est pas grande, car son diam. est $1920''$. Cela fait $\frac{1}{40}$ Du diamètre. - Mais $20''$ ne sont pas négligeables, et il faut avoir soin De les ajouter. - Les Tables Du O donnent la position apparente, et, pour les calculs géométriques, il faut ajouter l'aberration. Pour cela, on aurait Des résultats faux. - De même n'a pas D'aberration d'astre. C'est parce que le mouvement De la sphère céleste n'est qu'apparent, et que c'est la terre qui se meut. Or il y a toujours Des rayons qui touchent la terre. Donc, quand observons. leur arrivée au point De contact, il suffit d'un De ces rayons, et voit le O De la que la position est convenable.

Si c'était le O qui tournerait autour De la terre, en 24^h , il en serait autrement. Car $7^m 14^s = \frac{1}{169}$ De 24^h : ce qui ferait que nous le verrions arriver 1^o plus à l'avance l'endroit De sa position.

Vous voyez donc qu'il y a une très grande différence entre les deux hypothèses. Si c'était la terre qui tourne, il n'y a aucune illusion. - quelle est la vérité? Il y a moyen De trancher la question. - on pourrait croire que l'avance vers l'occident étant constante, il n'y a pas moyen De la constater. Mais il en résulterait que la courbe apparente Du O ne serait pas plane, et nous avons là une preuve De la rotation De la terre.

214. Supposons maintenant un astre immobile, et la terre tournant 7 limes par seconde. Considérons la terre en T quand elle reçoit un rayon venant De l'étoile. Le rayon est parti depuis longtemps. Supposons que, si la terre était immobile, nous verrions l'étoile suivant TE. Mais la terre se meut, et l'étoile paraît un peu plus basse, ou rapprochée sur le mouvement De la terre De $20''$ $\frac{1}{2}$, quand l'étoile est au Pô. - Plus elle est près De l'équateur, moins elle est abaissée.

Effets D'aberration.

215. ainsi, les Étoiles se déplaçant par 3 causes : Précession, Nutation, aberration.

Enfin, pour les Étoiles voisines, il y a une 4^e cause tenant au mouvement de la Terre : c'est un effet de Parallaxe annuelle, qui n'a lieu que pour quelques Étoiles (61^e du Cygne), et peut faire servir une autre Éclipse, qu'on ne peut confondre avec celle d'aberration, car la loi est différente : le déplacement est parallèle à la ligne qui vaît de la Terre au Soleil.

216. Ces phénomènes ont été étudiés par Bradley en 1726. on ne connaissait que la Précession, et la vitesse de la Lumière depuis 1708, mais non la nutation ni la parallaxe annuelle. Bradley découvrit la Parallaxe. Il fit des observations très précises, et, de la même année, observa quelques Étoiles n'étant pas fixes. Tout d'abord il crut avoir mis la main sur la parallaxe annuelle. Mais il reconnut que le phénomène avait lieu parallèlement à la vitesse de la Terre, tandis que, si c'était un effet de parallaxe, le déplacement est perp. à cette vitesse. — Il trouva la loi d'aberration, et l'expliqua.

Bradley continua ses observations pour voir s'il ne pourrait déterminer la parallaxe annuelle. — Et, après 20 ans de recherches, il découvrit les petites Éclipses de Nutation. 1746.

Il ne trouva pas de parallaxe. Ses instruments n'étaient pas assez exacts. C'est Bessel qui y arriva.

216. Je ne parlais pas des Satellites de Saturne. — L'un lui suit les mêmes que pour ceux de Jupiter.

Mais arrivons aux Étoiles. — Nous avons dit qu'il devait avoir une vitesse de rotation égale à la vitesse de translation d'un satellite placé à la même distance. — on conceit que le calcul puisse être fait. car on peut calculer la gravité en un point de l'anneau, et déterminer la vitesse de rotation pour que la force centrifuge fasse équilibre à l'attraction. Puis, on vérifie par la 3^e loi de Kepler.

C'est ce qui a fait penser que l'anneau est un anneau de satellites.

217. Uranus a quatre satellites certainement. — L'un d'eux a une orbite dont le plan est perp. sur celui de l'écliptique. — C'est le seul exemple connu.

Mly.

astronomie .

Cours de M^r. Puisseux.

(École Normale, 1851)

M. Landry

Des Instruments astronomiques.

Lunette Méridienne.

Elle consiste dans une lunette astronomique de 2 ou 3^m de longueur, munie d'un Réticule, et mobile dans le plan Méridien.

Suspension.

Lampe pour éclairer les fils micrométriques dans les observations de nuit.

1^{re} condition. — L'axe optique doit être rigoureusement perp. à l'axe de Rotation, et parfaitement horizontal.

Pour obtenir et vérifier à chaque instant l'horizontalité de l'axe de Rotation, on suspend un niveau à bulle d'eau aux deux tourillons, et, l'un des points d'appui étant fixé, on fait mouvoir l'autre au moyen d'une vis de rappel. — on vérifie le niveau en le retournant.

Quelques fois que l'artifice appliqué à la construction de la lunette, il est à peu près impossible que l'axe optique soit perp. à l'axe de Rotation. — Pour corriger le défaut, on vise une étoile fixe. Puis on retourne la lunette de manière que les points d'appui changent de position, et l'on regarde si la visée est de nouveau exacte pour les fils visés du réticule. Si l'axe optique est parfaitement perp. à l'axe de Rotation, cette coïncidence doit avoir lieu de nouveau. Si elle n'a pas lieu, on fait mouvoir le réticule avec une petite vis de manière que l'axe optique soit la bissectrice de l'angle des deux précédents. On recommence jusqu'à ce qu'on soit parvenu par un tâtonnement plus ou moins long à obtenir pour le retournement une coïncidence parfaite.

2^e condition. — L'un des fils du réticule doit être horizontal.

on y arrive par des réglages placés à la même hauteur.

Après avoir ainsi réglé l'instrument le plan méridien.

on observe à cet effet une étoile dont on puisse voir la révolution tout entière. Elle passera toujours dans le plan méridien deux fois. — on doit trouver le même intervalle de temps entre le passage Supérieur et le passage Inférieur qu'entre celui-ci et le passage Supérieur suivant. — on dirige à peu près la lunette dans le plan proposé, et l'on note l'heure :

h	pour	1 ^{er}	pass.	Sup.
h'	"	"	"	Inf.
h''	h''	2 ^e	"	Sup.

et l'on regarde si l'axe

$$h' - h = h'' - h'$$

Si cette condition est satisfaite, on a le plan méridien. — Sinon, on l'aide d'une vis, on change un peu un tourillon, et l'on recommence.

Pour retrouver la direction de la méridienne en cas de qq. déplacement dans la lunette, on place à une très-grande distance une mire fixe. — Elle de l'Observatoire de Paris et près d'Arcueil.

La lunette méridienne sert à déterminer le passage au méridien; et aussi le durée du jour sidéral.

Nous avons dit qu'on foyes de l'objectif, on disposoit deux fils en croix. Dans la pratique, on en prend six. L'un d'eux est horizontal, les autres verticaux, et divisent en parties égales le diamètre horizontal. — Quand on observe le passage d'une étoile au méridien, on lui fait suivre de près le fil horizontal, et l'on marque l'heure où elle est vue à travers chacun des fils verticaux. C'est la moyenne de ces heures qui donne pour l'heure du passage de l'étoile au méridien. Cette moyenne donne l'époque du passage de l'astre à un fil fictif dont le pied A, serait le centre des moyennes distances de A, A', A'', A''', A'', à un point O situé sur le fil horizontal. On a en effet les équations:

$$t_2 = t_1 + \text{le temps employé à parcourir } AA', \text{ c.à. } \frac{a_1 - a_1}{v} \quad (v \text{ est la vitesse de l'astre}).$$

$$t_2 = t_1 + \frac{a_1 - a_1}{v}$$

De même

$$t_3 = t_1 + \frac{a_2 - a_1}{v}$$

$$t_4 = t_1 + \frac{a_3 - a_1}{v}$$

$$t_5 = t_1 + \frac{a_4 - a_1}{v}$$

P. On ajoute

$$t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 = 5t_1 + \frac{a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - 4a_1}{v}$$

D'où

$$T = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{5} = t_1 + \frac{a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - 4a_1}{5v}$$

appelons x la distance du point O à un certain point A, ou diamètre, et qui passe par le point jusqu'à l'instant T. on aura l'équation (a_1 désignant OA,

$$T = t_1 + \frac{x - a_1}{v}$$

Égalant ces deux valeurs de T

$$\frac{x - a_1}{v} = \frac{a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - 4a_1}{5v} \quad x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5}$$

Donc le point A, est le centre des moyennes distances de A, A', A'', A''', A''.

On entend donc par axe optique d'une lunette méridienne la ligne joignant le centre optique de l'oculaire au point fictif que nous venons de déterminer.

Pour cette méthode, les erreurs se réduisent, et la précision peut aller jusqu'à $\frac{1}{10}$ de seconde.

Cercle Mural.

Le But Du Mural et De Déterminer les Distances Zenithales.

Est instrument le composé d'un cercle vertical, mobile autour d'une axe perpendiculaire fixé solidement dans un mur: C'est le cercle De Mural.

Le plan De ce Cercle Doit être Rendu parallèle à celui Du Méridien.

Le Cercle porte en son centre une lunette qu'il importe avec lui en tournant autour de son axe. - Cette lunette porte au foyer de l'objectif deux fils croisés dont l'un est horizontal.

L'axe optique De la lunette Doit être Rigoureusement parallèle au plan Du Cercle.

Pour noter la Distance angulaire Dont ce Cercle Tourne autour de son axe, on a disposé un anneau qui s'embraye exactement, l'extérieur du Cercle glisse à frottement sur le bord inférieur De l'anneau. - Cet anneau, qui est fixé, porte plusieurs Répertes, dont la comparaison avec les divisions Du Cercle montre De combien le Cercle a marché. - Pour apprécier avec plus d'exactitude les divisions qui se correspondent, chaque Répère est muni d'une vernier qu'on observe à l'aide d'un microscope fixé à la muraille.

Le Cercle mural Doit avoir de grandes dimensions afin que la division De la circonférence puisse être perçue très-bien. - Mais comme la tendance qu'a l'instrument à se déformer ou à se déplacer augmente avec son poids, et par conséquent avec ses dimensions, on comprend quelles précautions il faut prendre pour le fixer bien solidement.

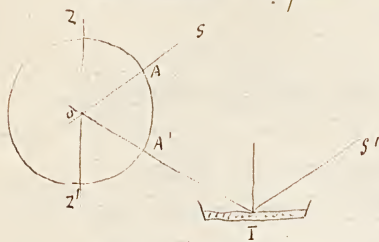
Nous allons avec cet instrument observer les Distances Zenithales Des étoiles.

Supposons qu'on ait déterminé à quelle division Du limbe correspond le zéro Du vernier lorsque la lunette est parfaitement verticale. Soit m cette division (on pouvant être fractionnaire). Si maintenant nous voulons observer une étoile à son passage dans le plan Du méridien, nous serons obligés de faire tourner la lunette d'un certain angle α égal à la Distance Zenithale de l'étoile. Le zéro Du vernier correspondra alors à la division $m + \alpha$ Du limbe. Si donc, une fois pour toutes, le nombre m qu'on désigne par l'erreur De collimation ou l'erreur De l'index était connu, pour avoir la Distance Zenithale d'une étoile, il suffirait de diriger la lunette vers cet astre à l'instant de son passage dans le méridien, de noter la division Du limbe qui correspond au zéro Du vernier, et, en retranchant la constante m , on aurait la Distance Zenithale.

ainsi, la première chose à faire pour se servir de l'instrument, c'est de déterminer l'erreur m De collimation. - Cette quantité serait facile à trouver, si l'on savait déjà par des observations antérieures qu'une étoile connue passe à tel instant juste au zénith. Car il suffirait de diriger la lunette vers cet astre, et de lire pour cette position Du limbe à quelle position correspond le zéro Du vernier. - Mais, comme nous ne voulons supposer aucune connaissance préliminaire, nous indiquerons le moyen suivant, qui est d'ailleurs employé dans les observations.

On dirige la lunette vers une certaine étoile. Soit n la division indiquée par l'instrument. - On a disposé auprès une lunette pleine De

mercure qui forme une surface horizontale réfléchissante. — On tourne alors la lunette de manière à apercevoir l'image par réflexion dans le Mercure. Soit n' la division à laquelle correspond le tiers du vernier. — Dans la première observation



$$ZO A' = 180^\circ - ZO A = 180^\circ - Z$$

on a

$$n = m + x$$

m désignant l'erreur de collimation, et x la distance zenithale de l'étoile.

Dans la seconde, on a

$$n' = m + 180^\circ - Z$$

ajoutant

$$m = \frac{n + n'}{2} - 90^\circ$$

La méthode que nous venons d'indiquer peut souffrir une objection. La voici. Pendant le temps que demandent les deux observations, l'étoile s'est déplacée, on voit que ce n'est pas l'image du point primitif qu'on observe, c'est celle d'un autre point, et l'on n'a plus $180^\circ - Z$ pour distance observée, mais $180^\circ - Z'$. — On évite cet inconvénient en observant l'étoile directement au point avant qu'elle ne passe au méridien, et son image un peu après qu'elle y passe. alors, on voit facilement que si l'étoile a passé au méridien juste à l'instant milieu entre les époques des deux observations, les erreurs de deux contraires se détruisent. — D'ailleurs, cette cause d'erreur est si peu perceptible, car il faut remarquer que la distance zenithale de l'étoile est au maximum lorsqu'elle passe dans le méridien, et l'on voit qu'environ d'un maximum, les variations sont presque impossibles.

Dans les grands cercles méridiens des observations, on emploie jusqu'à six degrés, et voici dans quel but. Analyser les deux extrêmes approche par hasard dans la conception d'un moral de grandes dimensions, il est impossible qu'il y ait une conformité absolue dans la division: en certains points d'ailleurs se trouvent des défauts inhérents à la matière même de l'instrument. Si donc on fait porter les lectures non pas sur un seul point de l'instrument, mais sur plusieurs points à la fois, il y a plus de probabilité pour qu'on ait des résultats exacts. — Chacune des six est munie d'un vernier sur lequel on lit à l'aide d'un microscope fixé à la muraille.

Il est facile avec ces six verniers comme avec un seul, d'observer la distance zenithale d'une étoile. — Supposons que la lunette soit parfaitement verticale, et lisons les indications

$$\begin{array}{cccccc} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & m_6 \\ \text{fournies par les six Verniers. — la quantité} \\ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 \end{array}$$

est ce qu'on prend pour erreur de collimation. — on la divise par le même procédé qu'on fait pour un seul vernier. — En effet, s'appelle

les indications fournies par les six verniers lorsqu'on vise directement au zénith, et

celles qu'on obtient quand on vise sur l'étoile. on aura les équations:

$$\begin{array}{ll}
 n_1 = m_1 + 2 & n'_1 = m_1 + 180 - 2 \\
 n_2 = m_2 + 2 & n'_2 = m_2 + 180 - 2 \\
 n_3 = m_3 + 2 & n'_3 = m_3 + 180 - 2 \\
 n_4 = m_4 + 2 & n'_4 = m_4 + 180 - 2 \\
 n_5 = m_5 + 2 & n'_5 = m_5 + 180 - 2 \\
 n_6 = m_6 + 2 & n'_6 = m_6 + 180 - 2
 \end{array}$$

et

91 ou

$$\frac{n_1 + n'_1 + n_2 + n'_2 + n_3 + n'_3 + \dots + n_6 + n'_6}{12} = 90^\circ + \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_6}{6}$$

Maintenant pour trouver la distance horizontale d'un astre, on observera au moment de son passage au méridien, et l'on prendra la moyenne des observations des 6 services. Chaque Dura a Couronne D'un angle α , pour lequel le nombre qu'on lira vis-à-vis le zéro du 1^{er} service sera $m_1 + 2$; au 2^e sera $m_2 + 2$, ... La somme de toutes ces lectures divisée par 6 sera donc $m + 2$, on désignant d'ailleurs de collimation calculée une fois pour toutes. En la retranchant donc de la moyenne des 6 observations, on aura α .

Parlons maintenant des conditions que l'instrument doit remplir pour que les indications soient bien exactes.

1^o. Il faut que l'axe du cercle soit bien perp. sur son plan, et en outre, que l'axe soit vertical. - des orbites ont des méthodes très précises pour s'assurer qu'un axe est perp. à un plan. Tout revient donc à placer le mural bien verticalement. à cet effet, on fixe aux deux extrémités d'un diamètre du cercle deux pointes sur lesquelles on trace deux traits, et l'on s'assure au comparateur que la hauteur de ces deux traits au-dessus du plan du limbe est bien la même pour les deux pointes, de sorte que la ligne qui les joint est exactement parallèle au plan du limbe. Puis, on s'arrange de manière que le fil qui les contient soit sensiblement vertical: et, si le limbe a bien la position demandée, un fil à plomb doit passer par les deux traits. Réciproquement, si cette condition est remplie, le limbe est bien vertical (cf. Emploi du cercle de Mouton).

2^o. Il faut s'assurer que le plan de ce cercle coïncide avec celui de l'axe du limbe, et que l'axe optique de la lunette est parallèle au plan du limbe. - voici comment: à l'aide d'une petite étoile qui passe à la lunette méridienne, il faut qu'on s'aperçoive à la lunette du mural, et qu'il en soit de même pour une seconde étoile. Si cette condition n'est pas remplie, il suffit de tourner un peu les fils du réticule par un mouvement de vis: car on a pris les précautions nécessaires pour que la lunette soit à très-peu près réglée.

Je dis que, du moment qu'on a aperçu deux étoiles au même instant dans la lunette méridienne et dans celle du mural, on est bien sûr que son axe optique décrit un plan parallèle à celui du méridien. - En effet, l'axe optique ne peut que décrire un cône autour de l'axe du cercle, et ce cône est la surface pour laquelle on a fait un plan horizontal qui passe par son sommet. Or il arrive que deux des génératrices de ce cône situées au-dessus du plan horizontal sont dans le plan du méridien: à cause de la symétrie, il doit y en avoir aussi deux au-dessous. - Donc le prétendu axe

à quatre Générations dans un plan. Donc il est lui-même un plan. — Les Deux
Étoiles qui s'y font observer doivent être aussi situées l'une De l'autre.

Avec cet instrument, on constate que la distance linéaire Du globe Terre
la même Dans l'un ou l'autre, et qu'elle est invariable, quelle que soit l'altitude
l'Étoile Dont on s'est servi pour la déterminer.

Si l'on fait cette observation à Paris, on trouve

$41^{\circ} 9' 47''$

on en conclut pour la hauteur Du pôle

$48^{\circ} 50' 13''$

En procédant sans précautions, on trouverait pour les distances linéaires Du
globe calculées D'après celles De plusieurs Étoiles Des nombres notablement diffé-
rents. Cela tient à ce que nous n'observons que les distances linéaires appa-
rentes, et que nos observations doivent être corrigées Des effets De la Réfrac-
tion astronomique. Nous reviendrons plus tard sur ce point. — En fai-
sant cette correction, nous ne ferons pas De grand videau : car il est
vrai que les premières tables De Réfraction atmosphérique ont été faites
D'après les différences observées entre les Résultats précédents, on peut
aussi former ces Tables sans connaissances astronomiques préalables, en
se servant seulement Du Baromètre et Du Thermomètre.

Cercle entier.

Pour acquies la vérification des lois du mouvement de Rotation de la Sphère céleste autour d'un axe, il ne nous faut plus qu'à l'instant même où elle a un instant quelconque de sa course, et vérifier qu'elle est bien dans la position qu'elle doit avoir d'après la loi de Rotation uniforme.

Cette vérification se fait au moyen d'un instrument appelé Cercle entier, et qui existe à l'Observatoire de Palermo. — Il se compose d'une LUNETTE fixée à un Limbe vertical, mobile lui-même autour d'un axe vertical, de façon que ce cercle vertical et la LUNETTE qu'il emporte avec lui ont deux mouvements: l'un autour d'un axe horizontal, et pendant que leur plan vertical reste toujours le même; l'autre autour d'un axe vertical, de manière à pouvoir correspondre successivement à toutes les parties de l'horizon.

Afin de pouvoir juger de combien l'axe vertical du cercle a tourné, on a adapté à sa partie inférieure un cercle horizontal qu'il emporte avec lui dans son mouvement.

Le cercle vertical est muni d'un arc fixe à l'axe vertical, et dans lequel ce cercle peut glisser. Cet arc porte un vernier qui permet d'apprécier avec une grande exactitude l'angle dont la LUNETTE a tourné dans un même plan vertical.

Le cercle horizontal aussi est muni d'un arc fixe muni d'un vernier pourvu de verniers sur les divisions du cercle.

Supposons que nous voulions connaître la position d'un astre à un instant donné. Nous dirigerons la LUNETTE vers cet astre, ce qui est toujours possible, à cause des deux mouvements que possède l'instrument, et nous lisons les indications des deux verniers. — On voit à quelle division du Limbe vertical correspond le Zéro du vernier quand la LUNETTE est dirigée précisément au Zénith; l'opération qui donne cette division est la même que pour le Meridien. On voit ensuite quelle est la indication du vernier horizontal quand le plan du Cercle entier se trouve être celui du méridien; car il est facile de faire coïncider ces deux plans en s'assurant qu'un même objet est vu au même instant à la LUNETTE méridienne et à celle du cercle.

Comparant maintenant ces deux nombres, obtenus une fois pour toutes, avec les indications de l'instrument pour chaque astre observé, on en conclut la distance Zénithale de l'astre, et l'angle du plan vertical où elle se trouve avec le plan Méridien, c'est-à-dire l'azimut. Ces deux distances ou angles sont les coordonnées de l'astre, et on finit par conséquent la position sur la Sphère céleste.

Pour nous allons indiquer quelques précautions à prendre pour que les indications de cet instrument soient exactes.

1°. Le plan du Cercle entier doit être vertical. On s'en assure de même que pour le Meridien, avec deux points et le fil à plomb.

2°. L'axe qui le supporte doit être vertical. — Pour cela, après s'être assuré que le cercle est tel, on fait tourner l'instrument autour de cet axe, et dans ce mouvement, le cercle doit toujours rester vertical — Je dis que

si cette condition est remplie, l'axe est vertical. — En effet, une ligne / le fil à plomb qui est verticale, et qui demeure verticale en tournant autour d'un axe, ne peut tourner qu'autour d'un axe vertical.

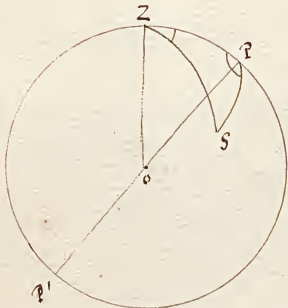
3°. L'horizontalité du second cercle est aussi nécessaire, et se constate avec le niveau. Mais cette condition est toujours remplie par l'instrument si la première l'est; parce que les axes ont des moyens très-petits d'axe semblés un axe et un plan qui lui soit perpendiculaires.

4°. L'axe optique de la lunette doit être exactement parallèle au plan du limbe.

Pour s'en assurer, on place la lunette bien horizontalement, et l'on envoie une mire très-éloignée (non pas une étoile, qui est mobile); puis on fait tourner l'instrument de 180° autour de son axe vertical, et de 180° aussi autour de son axe horizontal; on doit pouvoir viser de nouveau la mire si l'appareil est bien construit. — Enfin, les deux positions de l'axe optique font un angle double de celui qu'il fait avec le limbe. — on peut donc déplacer considérablement le télescope.

Nous avons maintenant le point que nous allons cher des indications de cet instrument pour vérifier l'uniformité du mouvement des étoiles.

Soit O le centre de la sphère céleste, PP' son axe, S une étoile et Z le zénith. — L'angle SPZ du triangle sphérique ZPS est égal à l'azimut; nous le connaissons par conséquent. De côté ZS , c'est la distance zénithale de l'étoile, et elle s'obtient avec le cercle entier.



Nous allons calculer maintenant ces quantités au moyen d'autres éléments que nous connaissons et en nous appuyant sur l'uniformité du mouvement; si donc le résultat du calcul coïncide avec les données de l'expérience, nous aurons vérifié l'hypothèse du mouvement uniforme des étoiles.

L'angle ZPS est facile à trouver. En effet, soit t le temps qui s'est écoulé depuis le passage de l'étoile au méridien jusqu'au moment où on l'observe. alors on pourra la proportion $\sin t : 2PS :: 90^\circ : 2PS$ pour l'uniformité supposée du mouvement?

Donc

$$2PS = \frac{h\pi}{12}$$

Le côté ZP est connu, c'est la distance zénithale du pôle. — Il en est de même du côté SP : c'est la distance polaire de l'étoile, qu'on a pu observer au moment où elle était dans le méridien. — on peut de ces trois données, on peut calculer $2PS$, ZS , et procéder ainsi à la vérification dont il s'agit.

Si l'on observe un grand nombre de jours, on trouve une différence entre le calcul et l'observation. — Nous en verrons les causes.

Equatorial.

Ce nouvel instrument permet aussi de vérifier la loi d'uniformité dans le mouvement des astres. — Il se compose d'un axe auquel on peut donner différentes directions, et qui doit, quand on se sert de l'instrument, être dirigé suivant l'axe du monde. — Cet axe porte deux cercles divisés. L'un est fixé le long de l'axe, et est rapporté avec lui dans sa rotation : il porte en son centre une lunette munie d'un vernier, qui peut tourner autour d'un q^d axe perp. au 1^{er}, et parcourir successivement toute la circonférence. — L'autre est perp. à l'axe, et entretoine aux 2^s par ce dernier dans son mouvement. Il est parfaitement divisé, et se meut dans une couronne qui est munie de verniers. De cette façon, on peut apprécier avec une grande exactitude l'angle dont l'axe a tourné.

Supposons que l'axe de l'instrument coïncide avec l'axe de la sphère céleste, et que la lunette ait été dirigée vers une étoile δ . Si l'on fait tourner l'axe de son lui-même de 360° , alors le rayon visuel décrira un cerc dont l'intersection avec la sphère céleste sera précisément le petit cercle que décrit l'étoile δ dans l'hypothèse du mouvement de rotation des étoiles autour de l'axe du monde. — Or, en tournant d'un mouvement uniforme et continu l'axe de, on aperçoit toujours l'étoile dans la lunette. Donc l'étoile décrit bien un petit cercle sur la sphère. — Pour donner à l'axe de le mouvement uniforme et continu dont nous venons de parler, il n'y a qu'à disposer un mouvement d'horlogerie qui fasse faire à ce axe une révolution dans 24^h. On voit par là que le mouvement uniforme des étoiles a lieu à raison de 15° par heure.

Cette vérification n'est que grossière, car il faut tenir compte des effets de la réfraction. aussi l'instrument que nous venons de décrire a-t-il été construit dans un autre but. On s'en sert pour suivre commodément un astre dont le déplacement a une certaine grandeur apparente et présente des particularités que l'on veut étudier. ainsi, par exemple, quand on veut faire une carte de la lune, et qui avec une lunette ordinaire il serait impossible de décrire à l'époque instant l'instrument permet de suivre l'astre, on se sert de la machine ci-dessus. — Dans ces observations, on se sert d'une lunette qui porte des fils rectangulaires au foyer de l'objectif. Ces fils peuvent être rapprochés les uns des autres au moyen d'une vis micrométrique, et l'on peut lire sur la tête de la vis de combien on les a rapprochés ou éloignés. — on peut ainsi connaître la distance angulaire de deux points d'un objet que l'on étudie. — En effet, on fait coïncider les deux points avec deux fils de la lunette, puis on les rapproche au moyen de la vis micrométrique jusqu'à coïncidence. On sait de combien on les a rapprochés; on connaît aussi le grossissement de la lunette. De là on conclura facilement la distance angulaire cherchée.

Une lunette semblable à la précédente peut servir aussi à suivre une comète dans tout son cours, et à déterminer sa marche dans le ciel : à cet effet, d'heure en heure, on mesure sa distance à différentes étoiles fixes, en mesurant la mesure qui vient d'être indiquée.

L'instrument que nous venons de décrire s'appelle *équatorial* parce que, dans sa position normale, le grand cercle perp. à l'axe est le plan même de l'équateur céleste. — on lui donne aussi quelquefois le nom de *Machéne parallactique*, parce que la lunette, pendant la rotation de l'axe, décrit un parallèle sur la sphère céleste.

Définitions.

on appelle *Plan horaire* le plan qui passe par l'axe du monde et un étoile.

Le cercle suivant lequel ce plan coupe la sphère céleste a reçu le nom de *Cercle horaire*.

L'angle du plan horaire avec le Méridien se nomme *angle horaire*, et il varie de 0° à 180° .

L'angle des plans horaires de deux étoiles est constant.

ascension droite.

Declinaison.

Problème :

Tracer l'A et la D. d'une étoile.

Globes et cartes.

Constellations.

Méthode des alignements.

Il est inutile de déterminer avec une grande précision les distances zénithales des étoiles qui passent près du Zénith, et, comme dans cette position du ciel les effets de la réfraction sont nuls, cette grande précision n'est pas inutile. Il n'en est pas de même dans les autres parties du ciel, car les corrections de réfraction ne sont connues que par une certaine approximation, et il est inutile que les observations ne donnent une plus grande précision que celle de l'instrument suivant.

Secteur Zenithal.

Le Secteur Zenithal est un Secteur d'un petit nombre de Degrés et d'un grand rayon mobile autour d'un axe vertical. Cet axe est gradué en Degrés, minutes, secondes et fractions de secondes. Une LUNETTE mobile autour du centre de ce Secteur est munie d'un Règle avec Vernier qui glisse sur les divisions du Cercle, et permet d'apprécier très-exactement le déplacement de la LUNETTE.

1°. Le Limbe doit être vertical. — on s'en assure au fil à plomb par la méthode toujours indiquée déjà pour le Niveau et le Cercle entier.

2°. L'axe de Rotation doit être aussi vertical. — voir le Cercle entier.

3°. L'axe optique doit être parallèle au plan du Limbe. Pour cela, on vise une étoile fixe en mouvement où elle passe au Zenith du Cercle mural. on doit s'apercevoir dans la LUNETTE du Secteur: si cela est, l'axe optique est vertical, donc parallèle au plan du Limbe. — Il est évident d'ailleurs que dans toutes les positions que prendra le Limbe, le même parallélisme aura lieu, puisque l'axe de Rotation est toujours bien vertical.

Lorsque ces conditions sont remplies, il est bien évident que si le Vernier coïncide juste avec le zéro de l'instrument quand la LUNETTE est verticale, il suffira pour mesurer la distance Zenithale d'une étoile de lire la division du Limbe à laquelle correspond le zéro du Vernier dans la nouvelle position de la LUNETTE. Mais cette coïncidence serait l'effet du hasard, et jamais elle n'a lieu. on est obligé de calculer même si l'erreur de collimation.

Supposons que le point où s'arrête le 0 du Vernier quand la LUNETTE est verticale soit à gauche du zéro de la division du Secteur. alors, quand on

visera une étoile située vers le N. l'angle observé sera la distance Zenithale de l'étoile augmentée de α

$$z = Z + \alpha$$

Retournons l'instrument de 180°. alors, la LUNETTE occupera le place, et l'on aura évidemment

$$z' = Z - \alpha$$

donc

$$\alpha = \frac{z + z'}{2}$$

α étant déterminé une fois pour toutes, quand on observera une étoile vers le N. il faudra retrancher α de la lecture faite sur l'instrument, et quand l'étoile sera vers le S. il faudra ajouter α .

Si l'on veut précisément mesurer le plan du méridien qu'on veut observer la distance Zenithale, il faut s'assurer que le plan du Secteur coïncide bien avec ce plan, et, pour cela, on doit s'apercevoir une étoile à la LUNETTE du Secteur juste au même instant que dans la LUNETTE méridienne.

Quart de Cercle Mural.

On remplace quelquefois le mural par un autre instrument appelé Quadrant qui n'est autre qu'un arc de cercle et remplace par un seul Quadrant et que la lunette est mobile indépendamment de l'instrument. Cette lunette porte une vernier avec lequel on lit des degrés, minutes, ... dont elle est munie sur le limbe. L'instrument doit être placé de manière que le point I, centre de cette division, soit point zéro de cette division soit sur une même verticale. A cet effet, l'artiste marque une ligne OB traversant de I et bien parallèle. Il suspend un fil à plomb très fin qui doit toujours servir Balancier sur le point B finement marqué sur le limbe. on s'en assure au microscope avant et après les observations.

Dans cet instrument, il y a encore à calculer une erreur de collimation. On ne pourra pas la déterminer en observant le Quart de cercle mural, puisqu'il est fixe. Mais on compare ses indications avec celles du Cercle d'altitude, qui donne la dist. Zenithale d'une étoile.

Quart de Cercle.

Cet instrument est portable. Il se compose d'un quart de cercle, autour
 duquel se meut une lunette munie d'un vernier. Le quart de cercle
 est porté sur un axe fixé à un pied à 3 branches et à vis calantes, autour
 duquel il peut tourner.

On munit des vis, au bout d'une verticale. - On s'assure que les limbes et
 l'axe sont verticaux par les moyens déjà indiqués.

L'axe optique doit être parallèle au plan de limbe, et l'on s'en assure
 en voyant si l'on peut observer le passage d'une étoile au point de croisement
 des fils de la lunette au même moment qu'au point de croisement des fils de
 la lunette méridienne, et cela, pour deux étoiles aussi éloignées que
 possible.

Quant à l'erreur de collimation, elle peut se déterminer par le
 retour à zéro. - Pour cela, le limbe de l'instrument est un peu plus
 grand que 90° et l'on vise une étoile près du zénith.

Un petit instrument peut être employé pour déterminer l'heure
 du passage d'une étoile au méridien.

Imaginons qu'on ait observé une belle étoile à une certaine heure.
 Probable à l'E. du méridien, on la faisant coïncider avec l'intersection des
 fils de la lunette. - Dans cette position, on fixera soigneusement la
 lunette sur le limbe vertical, et l'on notera l'heure. - Lorsque l'étoile
 aura passé par le méridien, et qu'elle sera dans la période descendante
 de sa course, on fera tourner l'instrument de 110. à 110. sans perdre à la
 lunette de l'objet, jusqu'à ce que l'étoile reparaisse. Dans le champ de la
 lunette, et l'on continuera ce mouvement autour de l'axe jusqu'à ce que
 l'étoile coïncide avec l'intersection des fils. - on note l'heure. - Dans ce cas,
 l'étoile sera à la même hauteur du côté de l'ouest qu'elle était au
 moment de la 1^{re} observation du côté de l'est. - Donc l'heure du
 passage de l'étoile au méridien est égale à la demi-somme des heures
 observées.

Réciproquement, l'erreur du chronomètre peut être observée par ce moyen.

Si le quart de cercle était muni d'un quart de cercle perp. à l'axe
 qui peut indiquer les angles dont tourne l'axe, on arriverait facilement
 par cette méthode les points N. et S. de ce cercle horizontal, et l'on
 trouverait la Méridienne.

C'est la Méthode des Hauteurs égales ou des Hauteurs correspondantes.

Plusieurs Astronomes maintiennent les instruments portatifs qui servent
 non seulement aux observations astronomiques proprement dites, mais encore
 aux opérations géodésiques.

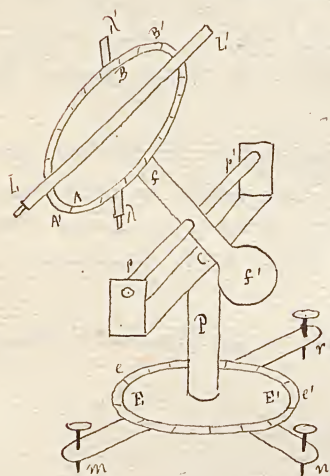
Cercle Répétiteur.

Le Cercle Répétiteur s'emploie principalement à Deux Usages :
 1°. Mesurer la distance Arcuée des Étoiles.
 2°. Trouver l'angle compris entre les Rayons Visuels dirigés vers Deux objets donnés.

En général, quand on veut mesurer l'angle de Deux Rayons visuels on se sert d'un cercle divisé muni d'une lunette mobile autour de son centre, et dont le plan peut occuper toutes les positions possibles. on dirige la lunette successivement vers les Deux points, et l'on déduit l'angle cherché de l'arc parcouru sur le limbe.

Mais ce qui fait le mérite de l'instrument dont nous allons parler et sa grande exactitude, c'est de permettre de porter à une méthode pour laquelle on obtient non pas l'angle cherché, mais un multiple quelconque de cet angle sans qu'on ait pour cela plus d'erreurs à craindre dans la lecture des divisions que si l'on mesurait l'angle simple.

Si donc n désigne la limite de l'erreur à craindre dans la lecture d'une division, et si on lit de l'angle A lui-même, on aura l'angle nA , l'erreur sera au plus égale à $\frac{n}{m}$, et l'on atténuera autant qu'on voudra l'erreur provenant de la lecture. — Or l'avantage des grands Instruments des Observatoires fins vient de leurs grandes dimensions qui permettent d'obtenir dans la lecture une approximation plus grande qu'avec des Instruments de dimensions moindres. — Mais le cercle Répétiteur permettant d'approcher d'atteindre autant qu'on veut les erreurs de lecture est supérieur, sous ce point de vue, aux grands Instruments eux-mêmes. Il fut inventé à la fin du siècle dernier par Borda.



Le cercle Répétiteur se compose d'un Cercle AB mobile autour d'un axe ff' perp. à son plan. Il est encastré dans un anneau $A'B'$ gradué dans toute son étendue, et porte lui-même un ou plusieurs verniers qui servent à indiquer l'amplitude de l'arc décrit. Le cercle AB porte une lunette LL' qui se meut avec lui, et, au-dessus de ce cercle, se trouve une seconde lunette KL' qui est mobile aussi autour de ff' , mais qui est fixe pendant les mouvements du 1^{er} cercle. à cet effet, elle est attachée à un anneau qui peut tourner autour de ff' . De cette manière, elle est exactement par rapport au limbe AB : mais on n'a besoin d'en tenir compte de cette exactitude que dans des circonstances assez rares. Nous en reparlerons d'ailleurs. — Cependant on peut faire tourner le cercle et les Deux lunettes autour de ff' à l'aide d'une disposition particulière. — Enfin, l'axe ff' est traversé par un essieu mobile autour d'un axe perpendiculaire pp' , lequel supporte

un pied vertical P qui porte un cercle divisé EE' . — Tout l'appareil est mobile autour d'un axe P , qui suppose lui-même sur 3 pieds munis de vis Calantes m, n, r . Le cercle EE' est mobile dans un anneau cc' , de sorte qu'on peut lire de combien de divisions a tourné l'appareil.

Tous les mouvements que provoque cet appareil sont produits au moyen ou moyen de vis de pression munies de vis de rappel destinées à produire des mouvements très lents.

Remarquons que le cercle AB peut être amené dans une position q'q.
à l'aide de deux mouvements rectangulaires qui s'effectuent autour de pp'
et de P . En effet, au moyen du premier, on peut incliner le plan sur
l'horizon depuis 0 jusqu'à 90° , et, au moyen du second, on peut rendre
quelconque sa trace horizontale.

Enfin, on s'est attaché surtout à rendre très-exacts les indications du cercle AB sur l'échelle $A'B'$. - AB prend la valeur nominale de mètres-copie, et de petite réflexion pour répondre la dernière sur les divisions et un faciliter la lecture.

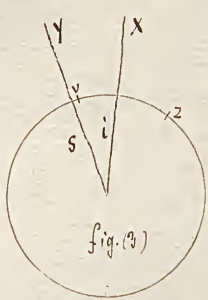
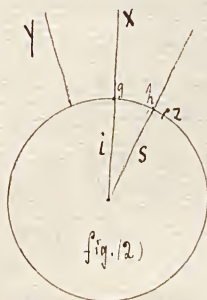
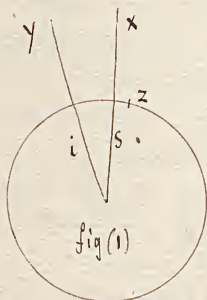
Expliquons maintenant comment on se sert de cet instrument pour mesurer l'angle de deux rayons visuels.

Dans le cas, pour lequel quel que soit vertical ou non. — on con-
-mence par amener à coincidence le zéro de l'une des verniers de AB avec
le zéro de la division tracée sur A'B'. Puis on amène le plan du limbe
à être parallèle à la ligne qui joint les deux points X, Y, ou plutôt, à
coincider avec le plan qui passe par l'œil et les deux points X, Y. on
obtient ce résultat par une suite de tâtonnements, et, lorsqu'il est obtenu,
on doit pouvoir voir avec la lunette inférieure le point X, et avec
la lunette supérieure le point Y. Les deux axes optiques des lunettes sont
alors toujours parallèles au plan du limbe. — Si ce parallélisme n'existait pas, l'im-
-age qu'on verrait serait la projection de l'angle véritable sur le plan du
limbe, et il en résulterait que de d^2 , à désignant l'angle du plan du
limbe avec celui des rayons visuels.

un point de vue des vis calantes et des mouvements pp' et R pour
cette première opération.

Lorsque cela est fait, la lunette Supérieure & visant X, la lunette Inférieure & visant Y, le Zéro Du vernier se trouvant en coïncidence avec le zéro De la graduation; - on fait tourner le cercle et les Deux lunettes autour De l'axe ff' jusqu'à ce que la lunette & soit dirigée vers X. le point & n'a plus changé. De plus Relativement à la lunette S. - Enfin, on donne la vis

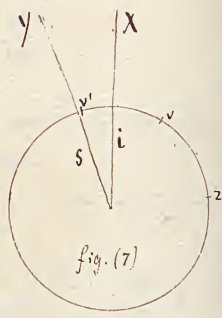
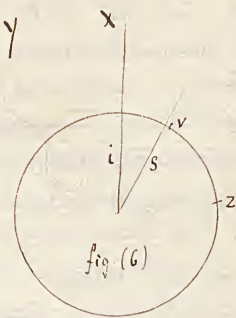
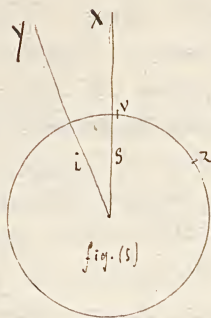
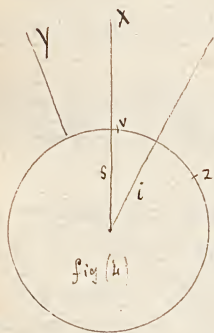
qui finit 3, et un dix.
de 3 vers 5. alors le
Zero v du versix, qui
finit. à l'genre vinci.
-J'ai avec le Zero z
De la Division, va extra
emport par la lunette
supérieure, et si deux.
-Vers en v: et



Place $vz = 2\pi$, π désignant l'angle à mesurer. Car, dans la position (2), la lunette s'a décrit un angle $= \pi$, et, dans la position (4), un angle $= 2\pi$.



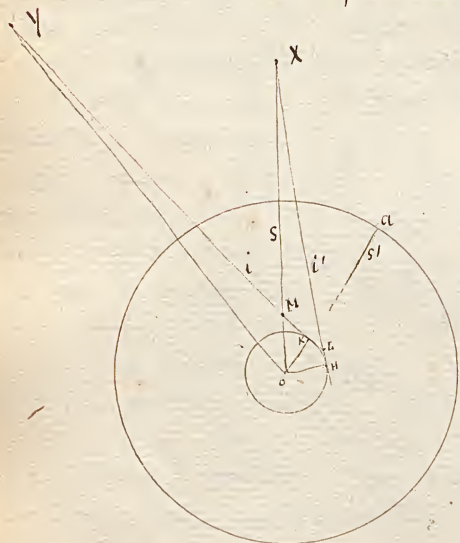
Il est facile maintenant d'avoir un multiple plus élevé. En effet, faisons



tourner le cercle et les deux lunettes de manière à amener S vers X. fig. (4). Détachons la lunette i de manière à viser Y avec elle, fig. (5), et nous aurons une disposition tout-à-fait analogue à la disposition (1). — On effectue alors les deux opérations (2) et (3). Pour cela, on amène i vers X, pour un mouvement de rotation autour de S, puis enfin à vers Y; fig. (6) et de cette manière il est facile de voir que $v'x = 4x$.

On obtiendrait de même un multiple pour quelconque de l'angle. Il faut remarquer qu'il n'y aura jamais que deux erreurs de lecture d'abord quand on fait coïncider le 0 du vernier avec le zéro de la graduation puis, quand on lit v' , ou v'' , ou v''' ... Lorsqu'on se sert de cet instrument, on fait grossièrement les lectures v' , v'' , v''' ,... et on les note après de se rapprocher le multiple si l'on est parvenu. Le soin qu'à la lecture correspondante au dernier multiple qu'on apporte beaucoup de soin. — à cet effet, on lit les indications des 2 verniers, et l'on en prend la moyenne. — Il y a aussi des erreurs de pointage. Mais on admet qu'elles ne sont pas toutes dans le même sens, de façon qu'elles se décompensent, et la somme de toutes ces erreurs n'est pas plus grande que celle qui résulterait d'une seule opération.

Lorsque les deux objets X et Y ne sont pas à une grande distance d'observation, il y a à faire une correction à cause de l'excentricité de la lunette inférieure. — En effet, cette lunette ne passant pas par le centre O, son axe optique est toujours tangent à une circonférence de



du point O comme centre avec un rayon Ragon qui déterminera approximativement pour chaque instrument en particulier. — Soit OX la position primitive de la lunette supérieure, KY celle de la lunette inférieure on fait tourner le limbe avec les deux lunettes i et j usqu'à ce que i vienne en i', suivant HIX. Au moment la lunette s'aura décrit un angle XOa égal à XLY, et sera venue suivant Oa. — L'angle qu'on lit, est également après que s'a été momentanée. Y, et donc YOa, et YOx est l'angle à mesurer. On a

$$YOa = YOx + XOa = x + XLY = 2x'$$

car on prendra YOa pour le double d'un certain angle différent de x, et c'est cette différence

nous allons Calculer. — Les deux triangles YMO , XMH ont un angle commun en M . Donc

$$Y + YOX = X + YLX$$

Où

$$YLX = Y - X + YOX = Y - X + \alpha$$

Substituant dans la dernière équation, il vient

$$2\alpha' = 2\alpha + Y - X$$

$$\alpha' = \alpha + \frac{Y - X}{2}$$

$$\alpha = \alpha' + \frac{X - Y}{2}$$

La correction α sera est donc $\frac{X - Y}{2}$, et elle est facile à calculer quand on connaît les distances des points X et Y au point où l'on se trouve. — En effet, les deux triangles rectangles OKY , OHX donnent

$$\sin Y = \frac{r}{OY} \quad \sin X = \frac{r}{OX}$$

r désignant le rayon du petit cercle auquel reste l'œil. 2^e Plan optique de la lunette inférieure. — Et, comme cette distance est très-petite par rapport à OY et OX , les angles X et Y sont aussi fort petits, par conséquent leurs arcs α sensible on pourra poser

$$Y = \frac{r}{OY} \quad X = \frac{r}{OX}$$

Par suite

$$\alpha = \alpha' + \frac{r}{2} \left(\frac{1}{OX} - \frac{1}{OY} \right)$$

Rem. I. Si $OX = OY$, la correction est nulle. — Si les deux objets sont à une distance infinie, comme les étoiles, la correction est nulle encore. — Enfin si l'on se transporte successivement aux 3 sommets d'un triangle, et qu'on mesure les 3 angles, la somme des 3 corrections est nulle : car elle est

$$\frac{r}{2} \left\{ \left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{AC} \right) + \left(\frac{1}{AC} - \frac{1}{BC} \right) + \left(\frac{1}{BC} - \frac{1}{AB} \right) \right\} = 0$$

Rem. II. Si l'on veut apprécier numériquement l'erreur

$$E = \frac{1}{2} r \left(\frac{1}{OX} - \frac{1}{OY} \right)$$

il faut que cette erreur soit exprimée en angles. or ici elle est exprimée en arcs. Car, dans les expressions $X = \frac{r}{OX}$, $Y = \frac{r}{OY}$, X et Y représentent des arcs pris dans le cercle dont le rayon est l'unité. E est donc la différence de ces deux arcs. Mais que E représente un angle, on se sert de la formule

$$\text{angle } E = \frac{\text{arc } E}{\sin 1''}$$

Où

$$E = \frac{r}{2 \sin 1''} \left(\frac{1}{OX} - \frac{1}{OY} \right)$$

ou

$$E = \frac{r}{\sin 2''} \left(\frac{1}{OX} - \frac{1}{OY} \right)$$

Pour donner une idée de l'influence que peut avoir cette erreur E , supposons $r = 20$ lignes. ($0^m, 045$). $\frac{r}{\sin 2''} = 2387,32$. Si $OX = 34980^m$ $\frac{r}{\sin 2''} \cdot \frac{1}{OX} = 0'',12$. — ainsi l'erreur relative à la vision de X est de 12 centièmes de seconde. celle relative à la vision de Y est de même ordre,

Donc l'erreur E qui en est la différence est très-faible.

Indiquons maintenant comment avec le cercle Répétiteur on peut mesurer la distance Zenithale d'une étoile.

La lunette inférieure alors ne sert plus, mais il faut rendre le pied P de l'instrument bien vertical, ainsi que le Limbe. Nous indiquerons tout-à-l'heure comment on y parvient.

Le Zéro du Limbe coïncidant avec celui du Vernier, on fait tourner tout l'instrument autour de son pied P de manière à amener le plan du Limbe dans l'azimut de l'étoile, puis, on descend le vis qui fixait la lunette, et on la fait mouvoir avec son limbe jusqu'à ce qu'on aperçoive l'étoile. — on fait alors tourner l'instrument autour de son pied de 180° , et l'on ramène la lunette seule vers l'étoile, en descendant le vis qui la fixe sur la graduation; alors, le Zéro de la division restant fixe, le Zéro du vernier est en paroi avec la lunette, et il est en une double de la distance Zenithale cherchée.

On peut aussi en une quadruple, en tournant l'appareil de 180° autour de son axe vertical, puis le faisant tourner autour de l'axe horizontal ff' jusqu'à ce que la lunette vise de nouveau l'étoile, et recommençant les deux premières opérations.

Et ainsi de suite.

Pour que les mesures soient faites avec exactitude, il faut que le pied de l'instrument soit vertical, ainsi que le Limbe. — à cet effet, la lunette inférieure porte un niveau à bulle d'air. On le rend horizontal; puis on fait tourner l'instrument autour de son pied. Si le niveau ne cesse pas d'indiquer l'horizontalité de la lunette, c'est que cette dernière a décrit un plan horizontal, et que l'axe de rotation est bien vertical. — Dans le cas où cela n'a pas lieu, on a recours aux vis calantes.

Cette condition est très-importante. Car si le pied de la véritable lunette faisant avec la verticale un angle α , on voit facilement que la distance Zenithale observée différerait de la véritable jusqu'à l'angle α .

Il faut aussi que le plan du Limbe soit vertical. — Pour s'en assurer, on place derrière le Limbe, perp. à son plan, un petit niveau à bulle d'air. alors, quand le niveau est horizontal, le Limbe est vertical, à cause de la perpendicularité. En supposant que ce niveau ait été parfaitement réglé pour l'artiste, il faut bien s'assurer qu'il se déformait dans sa monture, et qu'il cessait d'être perp. au Limbe. C'est pourquoi on vérifie avant de commencer les observations. Pour cela, on attache au Limbe, et sur un même plan, deux pincettes sur lesquelles on a tracé deux points qui doivent, pour construction, se trouver à égale distance du plan du Limbe: les artistes ont des moyens très-grands de remplir cette condition. à l'un de ces points, on plus élevé, on attache un fil à plomb, et l'on fait mouvoir le fil à plomb le long jusqu'à ce qu'il vienne buter exactement contre l'autre. alors le Limbe est vertical. on fait mouvoir les vis de niveau rappel du petit niveau de manière qu'il devienne horizontal, et il peut alors servir. Sa sensibilité de niveau alors préférable, et est plus commode.

Enfin cette condition n'est pas aussi essentielle que celle de la véritable verticalité de l'axe. en Astronomie de Sout qu'elle est commise sur la distance Zenithale n'est que le carré de α quand α est

Erreur commise en dirigeant l'appareil.

Pour le calcul Des Distances Rectilignes Des Lignes, il faut tenir compte Du déplacement De l'astre pendant la durée De l'observation qui peut être De quelques minutes quand on multiplie l'angle, selon l'usage, par sa distance rectiligne ou constamment varié, et a été difficile à chaque visée. — on suppose que pendant les quelques minutes que dure l'observation, la variation De la distance rectiligne est proportionnelle à l'écoulement De temps, et l'on considère la distance obtenue comme étant celle De l'astre à l'instant milieu entre les observations extrêmes. Il faut donc noter avec soin à la pendule le moment De la première et celui De la dernière visée.

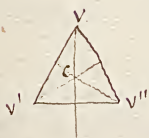
Remarques Diverses sur l'emploi Du Cercle Répétiteur.

Il est dit que, Dans les cercles Répétiteurs De 2 Pies. De Rayon, l'erreur Des Divisions ne peut pas s'élever à 15 secondes sexagésimales. — avec 30 observations, l'erreur est $\frac{1}{4}''$.

Si l'on suppose que l'exactitude Des Résultats moyens soit en raison composée Du nombre Des observations et De la longueur Du Rayon De l'instrument, 300 observations faites avec un cercle De 2 Pies. De Rayon équivalant à une observation unique faite avec un rayon De 20 m.

Rendre l'axe Du Cercle Répétiteur Vertical.

Les 3 vis forment un triangle équilatéral. On rend d'abord CV horizontal, et l'on fait tourner v' autour de CV de manière à rendre le plan parfaitement horizontal.



un plan perp. à CV,
et CV est horizontal.

Pour cela, on prend le grand niveau parallèle au limbe. on amène le limbe dans l'aplomb CV, et l'on met le niveau horizontal. on dirige le limbe de 180°.

Si le limbe est horizontal, l'axe est bien vertical. Dans le cas contraire, on a corrigé la moitié De l'erreur avec la vis V', puis on a corrigé l'autre moitié De la correction au moyen Des vis Du niveau. Mais, comme on n'est jamais arrivé à avoir fait cette bissection, on recommence l'opération avec le niveau ainsi corrigé. Si le retournement donne une différence, elle est incomparablement moindre, et, en peu D'essais, on parvient à l'annuler.

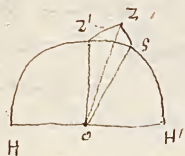
Ensuite, la colonne peut pencher Dans le plan perp. à CV. ainsi, en dirigeant le limbe Dans chaque De ses extrémités successivement, trouve-t-on toujours qu'il s'incline Dans les sens opposés, et d'une quantité égale. — Il faut élever v' et abaisser v'' De la même quantité. — Les Deux rotations se compensent en une seule ayant CV pour axe.

Comme on n'opère jamais ce parage d'une manière bien exacte, il s'ensuit que le rayon CV ne conserve pas tout-à-fait son horizontalité après ces opérations. — on recommence donc, en agissant sur ce rayon, à rétablir la verticalité De l'axe. — Mais cette fois, les corrections sont incomparablement moindres, et, avec un peu D'habileté, on parvient à rendre l'axe vertical après deux ou trois essais. — alors le niveau

reste horizontal dans qq. azimut, quel que soit le Limbe.

Erreur qui produirait un défaut de verticalité du Limbe dans la Recupération des Distances Zénithales.

Soit z' le faux zénith, z le vrai. S'il l'est, - Le triangle $z'zs$ est rectangle en z' (puisque l'axe est supposé vertical).



$$\cos z = \cos z' \cos I$$

De là on tirerait z , connaissant z' . Mais il faudrait faire le calcul d'une manière minutieuse, à cause du facteur $\cos I$ qui diffère très-peu d'unité: car I est fort petit. - C'est pourquoi il est plus simple de chercher directement par approximation la différence des angles z et z' .

$$\cos z = \cos z' (1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} I)$$

$$\cos z' - \cos z = 2 \cos z' \sin^2 \frac{1}{2} I$$

D'où

$$\sin \frac{z+z'}{2} \sin \frac{z-z'}{2} = \cos z' \sin^2 \frac{1}{2} I$$

$$\sin \frac{1}{2} (z-z') = \frac{\cos z' \sin^2 \frac{1}{2} I}{\sin \frac{1}{2} (z+z')}$$

D'où, approximativement, en faisant $\sin \frac{1}{2} (z+z') = \sin z'$

$$\sin \frac{1}{2} (z-z') = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} I}{\tan z'}$$

Si l'on compare les résultats de cette formule approchée à ceux de la formule rigoureuse, on voit que pour $I = 10'$ et $z' = 1^\circ$, elles sont d'accord. Plus près du zénith, l'approximation diminue, et enfin, elle cesse d'être suffisante si $z' = 0$, $z' - z = \infty$, tandis que $I = z$.

On doit tirer de là deux conclusions.

- 1°. Il faut atteindre au moins ce possible le défaut de verticalité.
- 2°. Il faut éviter d'observer trop près du zénith, où l'influence de ce défaut est sensible. - Ce dernier inconvénient est toujours nul pour la polaire, qui sert ordinairement à déterminer les latitudes.

Erreur qui peut résulter d'un défaut de parallélisme de l'axe optique.

L'angle du rayon visuel passant par l'axe optique avec la verticale sera la distance zénithale vraie. Mais la distance z' telle qu'on la lit sur le limbe mesure quelque projection de z sur le plan du limbe au moyen d'un arc de cercle perp. à son plan. Cet arc mesure donc l'angle de l'axe optique sur le plan du limbe :

$$\cos z = \cos z' \cos I$$

D'où

$$\sin \frac{1}{2} (z-z') = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} I}{\tan z'}$$

Cette erreur est toujours très-faible : car il est facile d'éviter l'erreur. Donc l'effet en sera ordinairement insensible.

Comment, lorsqu'on observe les hauteurs des astres au cercle répétiteur, pour en éluder les effets du mouvement diurne, et opérer absolument comme si l'astre était immobile.

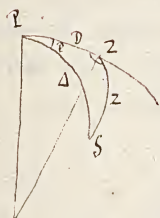
D'abord, en faisant ces observations, on ne peut ordinairement avoir que deux objets en vue : trouver l'heure par le moyen de la hauteur observée, ou trouver la hauteur méridienne de l'astre.

Supposons qu'on cherche l'heure.

Il faut alors trouver l'angle horaire par le moyen de la hauteur observée. Il est donc avantageux d'observer loin du méridien.

Le calcul fait voir que le mouvement en hauteur est le plus rapide lorsque l'azimut est de 100° . alors, l'astre se trouve dans le vertical E. O. ou Premier Vertical. C'est donc surtout dans cette position qu'il est avantageux d'observer les hauteurs au Zenith. Heureusement que cette condition n'est pas essentielle : car beaucoup d'astres ne passent pas au 1^{er} Vertical.

On a



Un instant après

On a

$$\cos P = \frac{\cos Z - \cos \Delta \cos D}{\sin \Delta \sin D}$$

$$\cos P' = \frac{\cos Z' - \cos \Delta \cos D}{\sin \Delta \sin D}$$

$$\cos P' - \cos P = \frac{\cos Z' - \cos Z}{\sin \Delta \sin D}$$

Ainsi on a

$$\sin \frac{1}{2} (P' + P) \sin \frac{1}{2} (P' - P) = \frac{\sin \frac{1}{2} (Z' + Z) \sin \frac{1}{2} (Z' - Z)}{\sin \Delta \sin D}$$

Si $P' - P$ est très-petit

$$P' - P = \frac{(Z' - Z) \sin \frac{1}{2} (Z' + Z)}{\sin \frac{1}{2} (P' + P) \sin \Delta \sin D}$$

et approximativement

$$P' - P = \frac{(Z' - Z) \sin Z}{\sin P \sin \Delta \sin D}$$

on voit que les circonstances les plus favorables à la détermination de l'angle horaire, ce sont celles dans lesquelles, pour une même valeur de $Z' - Z$, $P' - P$ a la plus petite valeur. — Il faut donc chercher le minimum de $\frac{\sin Z}{\sin P}$. on trouve donc

$$\frac{\sin Z}{\sin P} = \frac{\sin A}{\sin \Delta}; \text{ donc } A = 90^\circ.$$

On voit en outre qu'il ne faut pas que P soit trop petit. — on prendra donc les étoiles équatoriales (?).

Supposons donc que l'on ait eu égard à ces précautions diverses. on observe les hauteurs d'intervalle comme on le ferait si l'astre était fixe, mais, à chaque observation, soit paire, soit impaire, on note exactement l'heure, en fractions de secondes, où l'astre s'est placé à la cuspide des fils. — Chaque couple d'observations exige au plus 2', qqf. 1', suivant l'habileté de l'observateur. De temps en temps, à la fin d'une observation paire, on lit sur le limbe l'heure pour connue.

Lorsqu'on fait la lecture du arc après chaque couple d'observations, l'intervalle étant supposé de 2 minutes sexagésimales, on suppose que, dans l'intervalle de 8 ou 10^m les hauteurs observées varient proportionnellement au temps, de sorte que la moyenne des hauteurs correspond

exactement à l'époque moyenne, ou mieux quand on observe avec soin du méridien, comme nous l'avons indiqué. — Cela bien prouvé, on se dispense d'être si exact à la fin de chaque observation particulière, ce qui entraîne des longueurs; et on se contente, après 6 ou 8 observations, en un mot, après un nombre de couples qui comprennent 8 ou 10^m de temps. On moyenne cet assemblage avec soin, et l'on peut répondre qu'à l'époque moyenne des observations à l'arc moyen parvenu sur le limbe.

Mais si l'on prolongeait une même série plus longtemps, ou si l'on observait très-près du méridien, cette méthode serait fautive, comme le prouveront l'analyse et la formule

$$Z' - Z = (P' - P) \frac{\sin P \sin A \sin D}{\sin Z}$$

Cette formule suppose que l'on peut donner une valeur de P et de Z pour passer à d'autres extrêmement voisines P' et Z' . Elle serait exacte si l'écartement $Z' - Z$ de la distance Zénithale lorsqu'on connaît la variation $P' - P$ de l'angle horaire, laquelle se conclut du temps écoulé entre deux observations. C'est que $Z' - Z$ et $P' - P$ pourrout être supposés très-petits, ces deux différences sont sensiblement proportionnelles entre elles, et la moyenne arithmétique des distances Zénithales correspondra à celle des angles horaires en des époques des observations. Mais, pour cela même, on conçoit que cette supposition est limitée, et on peut être assuré que pour un temps très-court.

Or, on s'aperçoit, dans chaque cas, de son exactitude, et de l'étendue qu'on peut lui donner sans craindre d'erreurs sensibles? Il n'y a qu'à se servir d'une valeur donnée de Z et de P , par ex. de la distance moyenne observée dans une série, et de l'angle horaire moyen, que l'on peut conclure au moyen du triangle sphérique par la formule trigonométrique

$$\cos P = \frac{\cos Z - \cos A \cos D}{\sin A \sin D}$$

puis on suppose dans l'angle horaire un écartement égal à la moitié de l'intervalle d'une série, par ex. de 5^m de temps si les séries sont de 10^m. Il qui, réduit en arc, fait un écartement de 1° 15' sur P . alors, avec la nouvelle valeur $P' = P + 1° 15'$ on calculera la nouvelle distance Z' par la formule trigonométrique

$$\cos P' = \frac{\cos Z' - \cos A \cos D}{\sin A \sin D}$$

et l'on aura ainsi Z' et par suite $Z' - Z$. — On pourra donc comparer cette valeur à celle qui résulte de la formule approchée

$$Z' - Z = (P' - P) \frac{\sin P \sin A \sin D}{\sin Z}$$

Si elles s'accordent à très-peu près (1/10 de seconde) on pourra regarder la distance moyenne sur le limbe comme correspondant à l'époque moyenne des observations, sans quoi, il faudra recourir aux limbes. — Dans le calcul, il faut se servir de l'époque moyenne pour laquelle elle est la moins éloignée des extrêmes. Elle prolonge plus la progression sensible des angles horaires et des hauteurs.

Or, ainsi la distance moyenne de l'astre au Zénith, et l'époque moyenne qui y correspond ou temps de la période, en comparant avec la distance du triangle sphérique qui donne l'angle horaire? Il n'y a qu'à réduire un temps donné en arc, le nombre d'heures, minutes et secondes. Réduites comparées entre l'époque des observations et le passage de l'astre au

méridien. - Si, dans ce calcul, on a soin de compter les angles horaires à partir du méridien supérieur, et dans le cas du mouvement descendant, depuis 0 jusqu'à la circonférence entière, il suffira d'ajouter l'angle horaire calculé à l'AR du pôle Nord en temps, et la somme sera l'angle horaire du point γ du pôle, ou si l'on veut, du pôle.

C'est même qu'avant d'employer la distance zénithale observée pour calculer l'angle horaire, il faut la corriger de la Réfraction.

Quant à la distance polaire de l'astre, qui est aussi l'un des éléments du calcul, on la trouve dans la connaissance des Temps. Mais, comme ce catalogue ne donne que la position moyenne de l'astre, on y fait de petites corrections relatives à son péricée, à l'aberration et à la nutation, pour avoir la position apparente.

Si l'astre observé est le Soleil, l'angle horaire ainsi calculé donnera l'heure solaire.

Les astronomes comptent les heures à partir de Minuit, de 0 à 24.

Comme le diamètre du \odot a un diam. Appareil, on ne peut pas dans les observations consécutives saisir son centre comme pour une étoile et le placer sans le fil. - on l'adopte l'indifférence en mettant une fois le fil sur le bord supérieur, et une fois sur le bord inférieur. Par ce moyen, on a distance et champ petits, l'astre trop grand. De $\frac{1}{2}$ diam. et, comme les observations au cercle répétitives se font toujours en nombre pair, il s'ensuit qu'il s'opère toujours dans chaque série une exacte compensation.

Comme on s'appliquerait si l'on observait une planète, on ne.

on observe pas les étoiles en les mettant au point de croix, mais à une très-petite distance sur le fil horizontal. - Mais comme, malgré tout le soin de l'observateur, il est impossible que le fil n'ait pas une petite inclinaison, on évite d'échouer et échoue en observant toujours au même point du fil, ou au milieu sur des points très-éloignés. Pour cela, si, dans la 1^{re} observation, la lunette étant supposée à droite de l'observateur, on a mis l'étoile au point à droite du centre du fil, ce qui la met très-bien au point trop près du limbe, puisque nos lunettes s'inversent, on se place ensuite au point à gauche de ce centre dans la 2^e observation où la lunette est à gauche, ce qui la met très-bien. Trop près du limbe, comme les 1^{re} fois. Il se trouve alors qu'on a toujours rapporté l'astre au même point physique du fil, ou du moins, à une si petite distance, que l'effet de l'inclinaison du fil pendant ce faible intervalle n'a presque aucune influence sur la hauteur observée. - à la vérité, on s'écarte de 99. 999 de droite ou à gauche de l'axe optique: mais l'erreur est insensible, comme on le peut prouver par les formules données précédemment.

C'est là la Méthode des hauteurs absolues. Elle est plus exacte que celle des hauteurs correspondantes.

On peut encore augmenter les avantages en observant plusieurs fois d'un même astre, et les prenant de point à point du mouvement, ce qui évite toutes les erreurs d'AR, et affaiblit même celles de Réfraction.

Avec tous ces soins, M. Biot affirme que le cercle répétitif offre le moyen le plus sûr de déterminer le temps, soit absolu, soit relatif, et il ne doute pas qu'il n'ait l'avantage d'être le plus sûr.

la Sonette Méridienne.

Exemple d'un calcul de temps sidéral d'après une hauteur absolue d'étoile observée hors du méridien.

Soit Δ la distance polaire apparente, i. e. la distance réelle après la précession, aberration et nutation.

D la distance polaire de l'étoile.

Z la dist. zénithale observée, corrigée de la réfraction.

P l'angle horaire demandé.

$$\text{on a} \quad \sin \frac{1}{2} P = \sqrt{\frac{\sin \frac{Z+\Delta-D}{2} \sin \frac{Z+D-\Delta}{2}}{\sin \Delta \sin D}}$$

Voici un ex. de ce calcul appliqué à une observation de Rigel faite à l'observatoire de l'Université de Bonn le 21 Mars 1809, à la latitude de $51^{\circ} 21' 5''$, la hauteur du Barom. étant $0,76965$, et la température 6° cent.

La distance de Rigel au Pôle boréal prise dans la connaissance du temps et réduite en position apparente pour le 21 Mars 1809 est

$$\Delta = 98^{\circ} 26' 8'', 35$$

et l'AR réduite en temps pour le même jour

$$AR = 5^h 5^m 22^s, 61$$

L'observation faite au cercle répétiteur après le passage de Rigel au méridien a donné pour la distance apparente au zénith :

$$70^{\circ} 48' 59'', 21$$

Correction de niveau

$$- 0'', 47$$

$$70^{\circ} 48' 58'', 74$$

Réfraction calculée par les tables

$$2' 5'', 01$$

Distance vraie de R. au zénith à l'instant moyen de l'observation

$$70^{\circ} 48' 48'', 75$$

avec les données, on effectuera le calcul ainsi qu'il suit

$$I = 44^{\circ} 37' 37'', 6 = 2^h 58^m 30^s, 51$$

ou bien

$$AR = 5^h 5^m 22^s, 61$$

$$8^h 3^m 53^s, 12$$

Époque moyenne de la nuit, en temps de la pendule

$$5^h 46^m 30^s, 28$$

Retard de la pendule sur le temps sidéral

$$2^h 17^m 22^s, 81$$

Le calcul précédent suppose que l'on a pu calculer la dist. polaire et l'AR apparente de Rigel pour le jour de l'observation. — si cet effet, il faut connaître la précession, l'aberration et la Nutation de l'étoile pour le même jour après y ajouter ces grandeurs à sa position moyenne.

on a vu que les distances zénithales successives d'un astre et les angles horaires qui y correspondent sont liés entre eux par la relation suivante :

$$\sin \frac{1}{2} (Z+Z') \sin \frac{1}{2} (Z-Z') = \sin \Delta \sin D \sin \frac{1}{2} (P+P') \sin \frac{1}{2} (P-P')$$

Supposons que Z représente la distance méridienne, et Z' une distance observée

Arç. pris du méridien, en sorte que $2L$ soit une Arç. petite quantité que nous nommerons δ (+, par. sup. - par. inf.)

Supposons encore que δ représente la distance méridienne d'un couple de angles horaires à partir du méridien qui nous observe le passage. L'angle horaire P répondant à L sera nul, et P' correspondant à L' sera Arç.-petit.

En faisant ces substitutions dans la relation précédente, elle devient

$$\sin(2 + \frac{1}{2}\delta) \sin \frac{1}{2}\delta = \sin \Delta \sin D \sin^2 \frac{1}{2}P'$$

ou

$$\sin 2 \sin \delta + 2 \cos 2 \sin^2 \frac{1}{2}\delta = 2 \sin \Delta \sin D \sin^2 \frac{1}{2}P'$$

(à cause de $\sin \delta = 2 \sin \frac{1}{2}\delta \cos \frac{1}{2}\delta$)

La valeur exacte de $\sin \delta$ peut s'exprimer en une série convergente ordonnée suivant les puissances de $\sin^2 \frac{1}{2}P'$. - Nous en pourrions sans aucun calcul obtenir le 1^{er} terme du développement, qui suffit presque toujours. Car, en remarquant que $\sin \delta$ et $\sin \frac{1}{2}\delta$ sont Arç.-petits, on pourra négliger $\sin^2 \frac{1}{2}\delta$, et l'on aura dans une première approximation

$$\sin \delta = \frac{2 \sin \Delta \sin D \sin^2 \frac{1}{2}P'}{\sin 2}$$

On peut encore rendre le calcul plus commode en remarquant que δ est un Arç.-petit arc. on posera

$$\sin 1'' : \sin \delta :: 1'' : \delta$$

$$\sin \delta = \frac{\delta \sin 1''}{1''}$$

Donc

$$\delta = \frac{\sin \Delta \sin D}{\sin 2} \cdot \frac{2'' \sin^2 \frac{1}{2}P'}{\sin 1''}$$

et la correction est exprimée en secondes.

Comme on a en général $2L - \delta = S$, on aura la Dist. méridienne $L = L' - \delta$.

Pour établir la continuité entre les expressions algébriques, il faut compter la distance polaire Δ en allant du méridien sup. au méridien inf. depuis 0 jusqu'à la circonférence entière. alors, pour tous les passages supérieurs, Δ sera $< 180^\circ$, $\sin \Delta$ sera > 0 , et δ restera positif, et pour ceux qui de l'autre côté des distances Zenithales observées. - au contraire, pour les passages au méridien inférieur, $\sin \Delta < 0$ et δ s'ajoutera.

Pour appliquer la formule précédente, on calculera les valeurs du facteur $\frac{2'' \sin^2 \frac{1}{2}P'}{\sin 1''}$ correspondantes aux époques des observations. on en fait la somme, et l'on divise par le nombre des observations. Puis on multiplie ce résultat par le facteur $\frac{\sin \Delta \sin D}{\sin 2}$ qui est constant pour toutes les fois d'un même astre, et l'on aura la correction moyenne de la distance Zenithale observée.

Pour toute Genre d'observations que l'on peut faire avec le cercle Répétiteur, c'est la mesure de la hauteur méridienne des astres.

Pour cela, on s'observe une série de Distances Zenithales avant le passage au méridien, et une série après, à une distance δ - peu près égale. La distance moyenne donnée par ces séries diffère peu de la distance

méridienne: - Cependant, elle n'est ni plus ni moins égale, quoique elle est, dans les passages supérieurs, et la plus petite, et dans les inférieurs, la plus grande. De toutes celles qu'on observe. - Mais, en marquant avec exactitude l'époque où chaque observation a été faite, et connaissant d'ailleurs l'époque précise du passage de l'astre au méridien et sa distance polaire, on peut calculer la correction que chaque distance méridienne. - Cette correction n'est plus simplement proportionnelle aux variations de l'angle horaire comme dans le cas des observations faites loin du méridien: elle est prop. au carré du sinus de la moitié de l'angle horaire pour la note précédente). - Dans les passages supérieurs, elle est soustraite des distances au Zénith, parce qu'alors la distance méridienne est la plus petite de toutes; dans les passages inférieurs, elle est additive. - On m'a donc procuré sur le timbre et la colonne de toutes les distances observées, on y applique la somme de toutes les corrections, dans le sens convenable, et l'on divise la somme des arcs et des corrections par leur nombre: on, ce qui revient au même, on prend la moyenne des distances observées, et on lui ajoute la moyenne de toutes les corrections.

Si maintenant de la distance ainsi obtenue on la rapporte au méridien. Il y a un cercle vicieux apparent. Car, pour calculer la correction, il faut connaître la distance polaire de l'astre, sa distance méridienne, et la distance polaire du Zénith: et c'est ordinairement pour trouver une de ces trois choses qu'on fait les observations dont nous parlons. Mais on surmontera cette difficulté en remarquant que de ces éléments n'est que deux nécessaires: il suffit de deux valeurs approchées. Car les erreurs qu'on y peut commettre sont considérablement atténuées, parce que dans l'expression de la réduction au méridien, elles se trouvent multipliées par le carré du sinus de la moitié de l'angle horaire, lequel a un influence de ces erreurs sur la valeur de la réduction δ est tout-à-fait insensible. C'est pourquoi, si l'astre est connu, il suffira de prendre sa distance polaire dans la connaissance des temps ou dans les cartes célestes. - Et si de plus on connaît sa parallaxe p , on en conclura une valeur de Z , ou une valeur approchée pour calculer la 1^{re} réduction δ . - Mais si p n'est pas connue même approximativement, on n'a qu'à employer l'abrégi pour Z la distance moyenne observée, sans autre correction que celle de la réfraction. avec cette valeur et celle de Δ , qui est supposée connue, on calculera D , ou la distance du Pôle au Zénith. On moyen de ces valeurs approchées, on obtiendra celle de δ , et recommencera le calcul avec la distance méridienne corrigée, on en tirera une valeur de D plus exacte. alors ces éléments seront connus avec assez de précision pour qu'on puisse les employer au calcul définitif de la correction δ .

à l'abrégi, nous emprunterons encore ici des tables la distance polaire de l'astre. Dans l'état actuel de l'astronomie, ces distances sont connues pour les principales étoiles avec une extrême précision. Mais si l'astre observé était inconnu, il faudrait ou même supposer qu'on connaît la latitude du lieu où l'on observe, et par conséquent la distance du Pôle au Zénith. et avec cette distance et la valeur approchée de Z , on calculerait approximativement Δ , ce qui suffit pour avoir δ , et par suite Z et D avec plus d'exactitude, on moyen d'un 2^e calcul, comme dans le cas précédent.

Enfin, si l'on voulait que l'observation fût tout de lui-même, il faudrait qu'il déterminât approximativement la latitude par les passages sup. & inf. Des Étoiles circumpolaires, ce qui s'exécute par la Commission de la Dist. polaire; après quoi, il s'occuperait des autres astres.

Nous avons supposé que les angles horaires correspondants d'époque observation sont donnés en temps pour l'horloge. — Dans cet cas, il faudrait que l'horloge suivît exactement le temps sidéral, si c'est une étoile qu'on observe; le temps solaire, si c'est le Soleil; et en général que la marche fût uniforme à celle de l'astre observé. Il est impossible que cette condition soit remplie à la rigueur, mais elle n'est pas indispensable: il suffit que le mouvement de l'horloge soit bien connu, et en le réduisant à ce qu'il devrait être par le moyen du calcul. — Si ce mouvement s'écarte peu de celui de l'astre, il n'en résulte qu'une petite correction des fautes à faire sur le résultat définitif.

Mais, ce qu'il importe surtout de remarquer, c'est que, si l'astre observé avait un mouvement propre en déclinaison, il serait nécessaire d'y avoir égard: car la distance méridienne qui se réduit de époque observation partielle au moyen des réductions précédentes est celle qui aurait lieu si l'astre si la déclinaison de l'astre restait toujours la même qu'à l'époque de la 1^{re} observation. Si cette déclinaison varie, la distance réduite doit différer de la distance méridienne véritable, et cette différence doit être égale au changement de la déclinaison depuis l'époque de l'observation jusqu'à celle des passages au méridien. C'est pourquoi, si l'on suppose le mouvement en déclinaison uniforme pendant la durée de la série, il faudra calculer proportionnellement la correction de chaque distance réduite, en fonction de l'angle horaire qui y correspond. Ces corrections devront indiquer être des signes contraires avant & après le passage au méridien, en supposant, comme c'est le cas ordinaire, qu'ils changent en déclinaison se continue dans le même sens pendant tout le temps de la série. Car alors, si ce changement augmente la distance zénithale d'un côté du méridien, il la diminue de l'autre côté. De là résulte cette règle fort simple: Soient séparément la somme des angles horaires observés avant et après le passage, ces angles étant exprimés en temps, par ex. en minutes: Retenez après ces deux sommes l'une de l'autre, divisez leur différence par le nombre des observations, et multipliez le résultat par le mouvement de l'astre en déclinaison pour 1^{re} de temps, mouvement qui est donné pour les Étoiles astronomiques. Le produit sera la correction qu'il faut appliquer à la distance méridienne, calculée d'après l'ensemble de la série, comme si la distance polaire était constante.

Une seule série de ce genre suffit sur un astre dont on connaît la distance polaire méridienne suffit pour déterminer la latitude du lieu où l'on observe. Car si l'astre passe au méridien du côté de l'équateur, on retranche de la distance méridienne de la distance polaire, on aura la distance du pôle au zénith. — Si au contraire l'astre passe au méridien du côté du pôle, on ajoutera dans le passage supérieur, la distance polaire à la distance méridienne, dans les passages inférieurs, on la retranchera.

Parmi les Étoiles que l'on peut choisir pour obtenir ainsi la latitude, la Polaire et la latitude, parce que c'est elle pour laquelle les réductions au méridien sont les plus petites. Cela est vrai à la première de la distance polaire. C'est elle aussi qui a été la plus observée, surtout dans

les derniers temps : pour constater sa distance polaire et parfaitement connue. — on peut encore observer avec succès β de la petite ours, qui a été aussi beaucoup observée par Metchin et Delambre.

Lorsqu'on veut déterminer une latitude avec une précision extrême, par exemple pour la mesure d'un méridien, on se procure d'une grande étoile, on tâche de se rendre indépendamment même de la distance polaire. Pour cela, on observe au cercle répétiteur les deux passages sup. et inf. d'une étoile circumpolaire, pour en la Polaire ou β de la petite ours. On réduit ces observations au méridien avec les valeurs de la distance polaire les plus exactes qu'on peut se procurer, et l'on tire de chacune d'elles une distance du Pôl au zénith appelée de toute l'erreur qui peut avoir été commise sur la distance polaire. Mais cette erreur agit en sens contraire sur les résultats des deux passages. Elle disparaît donc dans leur somme, qui donne ainsi la distance du Pôl au zénith, et se double dans la différence, qui donne l'erreur de la distance polaire. — Cette opération est tout-à-fait pareille à celle qui se fait dans la distance méridienne du \odot lorsqu'on observe les deux bords.

Le cercle répétiteur peut encore servir et sert en effet à trouver la distance angulaire de deux astres, ou celle d'un astre à un objet fixe. Le procédé est absolu. Le même qui pour mesurer les angles de position des objets terrestres dans des plans inclinés. Seulement, si l'un des objets ou tous les deux sont mobiles, il faudra faire varier continuellement l'inclinaison du plan de l'axe de manière à lui faire suivre toujours les deux objets. Chaque fois que la lunette est fixée sur l'astre, on note exactement, d'après la minute, la seconde, ... comme dans les autres observations célestes. En bornant les séries à un petit nombre de minutes, on peut régulariser la distance moyenne comme répondant à l'époque moyenne des observations. Pour nous avons vu qu'il y a de grandes distances du méridien, le mouvement de l'astre est sensiblement uniforme pendant un petit intervalle de temps.

Cette opération, qui exige beaucoup d'habileté et d'exactitude, sert à trouver les azimuts des objets terrestres, par ex. ceux des signaux, pour orienter une méridienne ou une arche. La distance des signaux au zénith étant connue, peut être facilement observée. Elle de l'astre peut se calculer d'après le temps de l'observation. avec les données de la distance moyenne, on forme un triangle sphérique dont les 3 côtés sont connus. on peut donc trouver facilement l'angle opposé au 90° : c'est la différence des azimuts. On connaît d'ailleurs l'azimut de l'astre, d'après le temps de l'observation et d'après l'heure de son passage au méridien. on connaît donc l'azimut absolu de l'objet.

Il faut remarquer que, dans ce calcul, on doit employer la distance apparente au zénith, appelée de la réfraction, puisque l'arc observé est pris entre les distances apparentes. Il est clair que l'azimut absolu et la différence d'azimuts restent les mêmes malgré le réfraction des hauteurs.

on peut commencer ces observations sur le Soleil.

Généralement, l'instant le plus favorable est celui où l'angle horaire de l'astre est de 90° , ou 6^h . après son passage au méridien. car alors

Il est rare de s'éloigner du méridien, ce qui fait que, dans les observations
récentes de cette époque, l'azimut varie fort peu. — D'un autre côté, il faut
se garder d'espérer trop près de l'horizon, lorsque l'astre entre dans des couches
où il en peut éprouver des réfractions extraordinaires. Car alors sa distance
au zénith qu'il faudrait calculer d'après l'observation du temps pourrait
être fort fautive.

On évite et inconvénient en employant la polaire au lieu du Soleil. alors
il faut avoir un signal fixe qui puisse être aperçu la nuit, afin de pouvoir
observer sa distance angulaire à l'étoile. — Dans ce cas, rien n'est
plus avantageux que les temps d'observer d'être munis de réflexeurs. — on
prend ensuite à l'aide d'un angle que ce signal forme avec l'objet terrestre
dont on veut déterminer l'azimut.

Géodolite.

Cet instrument sert à mesurer l'angle de deux plans verticaux passant par l'observateur et deux objets, - et aussi à mesurer les distances horizontales. Il remplit donc le même objet que le cercle entier. Seulement, à la différence des instruments, il a le grand avantage de répéter chacune des deux mesures dont nous venons de parler, d'une manière à donner un multiple de ces angles. Nous connaissons le grand avantage de cette méthode.

Cet instrument doit donc, comme le cercle entier, se composer d'un axe vertical, portant un cercle vertical muni d'une lunette et un autre cercle horizontal. - Le cercle horizontal est muni de verniers, et peut glisser dans une couronne qui porte les divisions. - Le cercle vertical est mobile avec la lunette, dans une couronne analogue.

L'instrument possède 4 mouvements :

1°. Mouvement d'un axe vertical autour d'un axe vertical, sans qu'aucun vernier se déplace sur les lattes.

2°. Mouvement de l'appareil autour d'un axe vertical, pendant que le vernier du cercle horizontal parcourt l'arc correspondant qui reste fixe.

3°. Mouvement du cercle vertical avec l'arc qui l'entoure, sans que l'axe horizontal, sans que le vernier du cercle se déplace sur l'arc qui l'entoure.

4°. Mouvement du cercle vertical dans son arc sans que celui-ci change de place.

Alors, il faut s'attacher à assujettir bien solidement l'appareil. Pour cela, on a 3 rondelles de cuivre munies à leur partie inférieure de 3 pointes; on les place sur le support, et l'on sur ces pointes qu'on fait dépasser les vis calantes qui portent le Géodolite. Le pied de l'instrument fait enfoncer les pointes dans le bois, et il n'y a aucun danger qu'il se dérange dans le courant des opérations.

Il faut ensuite s'assurer que l'axe est vertical. - Pour cela, on se sert d'un niveau à bulle d'air placé parallèlement au plan du cercle horizontal, et on le place d'abord de manière que la bulle soit au milieu. Puis, on fait tourner l'instrument, et si la bulle n'est toujours au milieu du niveau, c'est que l'axe n'est vertical. - Si non, on se sert des vis calantes.

Puis, mais si le plan du cercle antérieur se met la lunette et le vertical, on se sert d'un second niveau qu'on place tangentialment à l'axe de la lunette, et, on munit d'une vis de pression, on donne à l'extrémité de l'axe de petits mouvements ascendants ou descendants, jusqu'à ce que le niveau indique qu'il est horizontal. Et comme on a construit et on s'assure parfaitement, perp. au plan du niveau, on en conclut que celui-ci est bien vertical.

Les précautions une fois prises, expliquons comment on mesure l'angle de deux plans verticaux passant par deux objets et l'observateur. - On fait d'abord tourner le vernier du cercle horizontal sur le pied

De la Division De l'anneau qui l'entoure. Je fais alors le cercle sur son anneau, après quoi j'étais toujours prêt à l'instrument autour d'un axe vertical De manière à diriger le plan du cercle vertical à peu près dans un des plans Verticaux donnés. Je me suis De la vis D'appel pour que la visière finisse par être complétée. (Dans ce mouvement, le cercle De visière Du cercle principal n'a pas bougé.) Je m'assure que cette visière est complétée en moyen De la lunette que je fais tourner dans son plan D'une manière quelconque, puis que je n'ai pour but que De mesurer l'angle Des Deux plans d'intersection, alors, etc.

Ci qui donne l'angle opposé.

Il est facile De mesurer un multiple, le double, le triple, le quadruple, le quintuple, etc. — est évident.

Lunette D'épreuve. — en pris De l'instrument le donne une lunette qui n'est ni visière ni, dans le cas De l'opération d'opération, l'instrument n'a éprouvé aucun changement. Dans cela, on la dirige d'abord vers un objet déterminé, et, à la fin De l'opération, on vérifie si la lunette est encore dans la direction De l'objet. — Si elle ne s'y trouve pas, on s'y ramène par un mouvement De rotation angulaire, très-lent angulaire perceptible tout le système: et alors on prend De nouveau le 2^e objet.

Dans aucun cas, on peut, avec le télescope, mesurer les distances Linéaires Des étoiles en astronomie, et d'un objet p. d'une montagne par ex. en Géométrie.

1^o. Sur le Limbe vertical, on place le cercle De visière en visière avec le cercle De la division, ce qui se fait par un mouvement de la main, puis par un mouvement. Invisible au moyen D'une vis angulaire.

2^o. alors on fait tourner le Limbe autour De l'axe vertical De manière à l'anneau dans le plan De l'objet dont on veut mesurer la distance Linéaire, et l'on fait tourner le même Limbe sur lui-même, c.àd. autour De son axe horizontal, De manière à viser l'objet avec la lunette.

3^o. on tourne le Limbe De 180° autour De l'axe vertical. on observe la vis qui fixe la lunette à l'anneau et l'on fait tourner la lunette dans le plan De l'axe De manière à viser l'étoile. — on a ainsi l'angle double De la distance Linéaire opposée.

angle quadruple:

1^o. Rotation De 180° autour De l'axe vertical.

2^o. Rotation De la lunette d'un cercle intérieur autour De l'axe horizontal. — jus qu'à ce qu'on ait ramené la lunette sur l'étoile.

3^o. on continue comme pour mesurer un angle double. — on a alors l'angle quadruple.

Accessoires.

1^o. Réflexeur en miroir pour éclairer les fils De la lunette dans les observations De nuit.

2^o. oculaire particulier pour les étoiles voisines De l'équateur: un miroir incliné à 45°. Réfléchit horizontalement les rayons verticaux, et évite à l'observateur une position pénible.

Sextant.

Son invention est due incontestablement à Newton.

La description est surtout (brevet, cosmographie).

Premier principe.

Si les deux miroirs sont dans deux plans perpendiculaires pour l'un et les deux objets, et sont parallèles, un objet sera vu par double réflexion dans la même direction que directement. — et immédiatement.

Second principe. —

Vois les notes à la fin, page 327.

avant de se servir de l'instrument, il faut s'assurer de la perpendicularité des deux miroirs sur le plan du limbe. — Dans le miroir mobile, qui est entièrement étamé, on regarde le bord du limbe gradué, par réflexion. Il faut que l'horizon soit dans le prolongement du bord étalé. — Dans le miroir fixe, on s'assure qu'on peut obtenir la coïncidence des deux images d'un même objet.

Après, on determine d'abord le point de la division où aboutit le tiers du vernier quand les deux miroirs sont parallèles : c'est l'erreur de collimation.

Mais supposons que cette erreur n'existe pas.

Usage du sextant.

Ainsi vient son nom. — Il donne les angles de 110° .

Les marins s'en servent pour mesurer la hauteur d'un astre au-dessus de l'horizon. Ils prennent le bord de la mer pour horizon, et s'étoile pour second objet. — Si c'est le soleil qu'on observe, on se sert de lunettes noircies.

Le bord de la mer n'indique pas l'horizon vrai. — Il y a des erreurs. — Elles sont nous pourrions plus tard.

On peut encore avec cet instrument mesurer la distance angulaire de deux astres.

Cercle à Réflexion.

Cet instrument qui diffère du Sextant qu'en ce que, au lieu d'un limbe comprenant 60° , on a un cercle gradué tout entier, se qui permet d'appliquer le principe de la Réflexion des angles. — Il est dû à Borda. —

On y retrouve les deux Glaces de quart d'heure; l'un d'eux, elles sont toutes les deux mobiles. La glace demi-lunée et demi-transparente est fixée à la lunette, mais son ensemble peut tourner sur le cercle divisé. — Le miroir étami se meut avec une alidade, comme d'un vernier.

On commence par s'assurer, comme dans le Sextant, que les deux miroirs sont perp. au plan du limbe. Puis on met la lunette au zéro du limbe, et l'on rend l'autre miroir parallèle à celui qui est fixé à la lunette.

Pour mesurer l'angle de deux objets, on en regardera un directement; puis on attachera l'alidade du grand miroir, et on la fera tourner jusqu'à ce que l'image du 2^e objet coïncide avec celle du 1^{er}. — L'angle dont elle a tourné est la moitié de celui qu'il faut mesurer. — Mais, comme le cercle est divisé en demi-degrés, on lit l'angle lui-même.

Pour avoir des multiples de cet angle, on observe la vis qui tendait fixer le miroir double et la lunette, et on le rend parallèle au grand miroir. on le fixe, et l'on fait tourner le grand miroir de manière à reproduire la coïncidence. — on a ainsi six le double l'angle double.

on peut continuer autant qu'on le veut.

De La Terre.

Jusqu'à présent, nous n'avons fait que vérifier les lois du mouvement des astres autour de l'axe du monde en supposant que l'observation était toujours dans un même lieu.

Si nous supposons maintenant qu'il se déplace à la surface de la Terre, les lois précédentes sont toujours vérifiées par l'expérience, et les astres lui semblent toujours être des cercles autour d'un certain axe.

De ce fait, on peut conclure que les dimensions de la Terre ne sont pas appréciables par rapport aux grandes distances qui nous séparent des étoiles. — En effet, quand on s'agit nous semble d'être une circonférence, et les astres nous paraissent même s'écarter d'être un cercle. Cet objet ne pourra donc nous paraître d'être un cercle qu'autant que nous nous déplaçons sur l'une de ces cônes. Donc, si l'on veut toujours d'être un cercle quelle que soit la position de l'observateur à la surface de la Terre, il faut que celle-ci ne soit qu'un point mathématique par rapport aux distances des étoiles.

La position des dimensions de la Terre par rapport aux étoiles étant ainsi de ce que les distances angulaires des étoiles restent les mêmes quel que soit le point où l'on observe.

Enfin, une dernière preuve, c'est que les étoiles, dans les télescopes les plus puissants, n'offrent pas de diamètre appréciable. Le fait le plus fin suffit pour les cacher. Elles nous paraissent donc excessivement petites. Mais ce devrait être des corps très-considérables, sans quoi la lumière qu'elles nous envoient ne serait pas aussi vive. Il faut donc que ces quelques distances à la Terre sont infiniment grandes.

Les étoiles nous fournissent aussi une preuve de la rondeur de la Terre. En effet, si leur disposition matérielle reste la même quand on se déplace sur la surface de la Terre, il n'en est pas de même de leurs distances à l'observateur. Si l'on marche vers le N. on voit le pôle s'élever de plus en plus vers notre Zenith. Si l'on marche vers le S. il s'abaisse. Or la grandeur du pôle, c'est l'angle que fait l'axe du monde avec le plan de l'horizon. Comme cet angle est le même d'une manière continue quand on s'avance dans un sens ou dans l'autre d'une manière continue, il faut que le plan de notre horizon s'incline toujours dans le même sens quand nous nous dirigeons toujours vers le N., et toujours en sens contraire quand nous nous dirigeons vers le S.

Si nous considérons nous-mêmes éloignés d'une manière continue, et que nous nous en éloignons toujours en augmentant l'angle d'observation que nous faisons, nous nous éloignons toujours vers le N. Nous verrons les astres former une courbe méridienne plus tard qu'on méridienne précédente. Il faut en conclure que le méridien est incliné vers le N. et que le plan de l'horizon

Est incluse dans le même sens.

Enfin, soit qu'on marche vers le N. le S. l'E. ou l'O. on ne trouve ni le grand pas, le plan qd. à la surface de la Terre s'incline toujours dans le même sens. - Le caractère ne peut appartenir évidemment qu'à une surface courbe. - C'est évident.

Cette courbe n'est autre que l'arc d'observation que l'on peut faire au bord de la mer sur un vaisseau qui s'éloigne, et sur la manière dont s'opèrent les voyages de navigation en phrase ou en une éminence située au bord de la mer.

Quand donc nous figurons le globe terrestre isolé dans l'espace, et cette idée est toute naturelle quand on songe aux voyages de circumnavigation effectués dans tous les sens; en marchant sous une voûte d'orient en vers l'occident, les voyageurs sont devenus un point de départ.

Mais jusqu'ici, rien ne nous indique d'une manière bien précise la forme de la Terre. - Nous allons citer quelques faits qui prouvent qu'elle est sensiblement sphérique.

D'abord, quand on est en pleine mer, l'horizon est sensiblement un cercle; et si, avec un instrument propre à mesurer les distances horizontales, nous cherchons les hauteurs des différents points de ce cercle, nous les trouvons égales entre elles. - C'est donc un cercle dont l'axe est vertical, et le cône qui a pour sommet l'œil de l'observateur et pour base ce cercle est un cône droit convergent à la surface de la Terre. - L'observation précédente se fait à toutes les hauteurs accessibles à l'homme.

avec ces données expérimentales, le problème est réduit à une question de Géométrie:

Quelle est l'enveloppe d'un cône de révolution ayant même axe?

C'est une surface de révolution autour de ce même axe.

Mais, comme la même chose a lieu pour une infinité de points de la surface terrestre, on en conclut que cette surface est de révolution autour d'une infinité d'axes, et que c'est une sphère par conséquent.

Le genre d'observation nous fournit une valeur approchée du rayon de la sphère terrestre. En effet, supposons qu'on soit en O à une certaine hauteur h au-dessus du niveau de la mer, et qu'on mesure la distance horizontale de l'horizon, c. ad. l'angle BOA. - Soit α son supplément. - Le triangle rectangle BOA donne

$$R = (R+h) \sin \alpha$$

$$R(1 - \sin \alpha) = h \sin \alpha$$

$$R = \frac{h \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$$

α diffère très peu de 90°. Si α = 90° - ε, on aura

$$R = \frac{h \cos \epsilon}{1 - \cos \epsilon}$$

et si nous remplaçons cos ε par 1, 1 - cos ε par 2 sin² $\frac{\epsilon}{2}$, et puis par $\frac{\epsilon^2}{2}$, il viendra

$$R = \frac{2h}{\epsilon^2}$$

Pour h = 100^m on trouve ε = 10° = $\frac{\pi}{18}$; et par suite R = 634000^m.

Puis que les résultats sont suffisamment approchés, il peut servir

des les Distances Limitées Des effets De la Diffraction, et faire l'Observation que l'atmosphère est une Surface.

admettons ce résultat d'approximation que la Terre soit sphérique.

Pôles.

Méridiens.

Equateur.

Parallèles.

Latitude et Longitude.

Épigramme :

La latitude d'un lieu est la hauteur du Pôle.

Mais nous supposons dans ces Définitions la Terre parfaitement sphérique. Elles conserveraient d'avoir lieu si la Terre n'en était pas. — et il n'y a rien que la Terre diffère un peu d'une sphère. — Nous serons donc obligés de modifier quelques-unes de ces Définitions. — Mais elles suffisent pour l'instant.

atmosphère.

on donne le nom d'atmosphère à la couche d'air qui enveloppe la Terre, et dont la densité varie avec la hauteur. — Si elle suivait la loi de Mariotte, et que la température fût uniforme, les hauteurs croissant en progression arithmétique, les densités décroissent en progression géométrique. Dans cet état, l'air serait illimité.

ce n'est pas tout. En effet, la Terre tournant avec son atmosphère autour d'elle-même, les molécules de cette atmosphère participent à sa force centrifuge. Cette force croît avec le Rayon du Cercle décrit, et, pour un Rayon égal à 6 fois le Rayon terrestre, elle est égale à la pesanteur. — Pour un Rayon de 12 fois le Rayon terrestre, elle est égale à la pesanteur, et au-delà elle serait supérieure et l'air se dégageant de la Terre, elle ne pourrait plus en être limitée.

Il y a d'ailleurs d'autres phénomènes qui prouvent que l'atmosphère est limitée. — après que le Soleil s'est couché, la Terre n'est plus plongée dans l'obscurité, et elle reçoit de la lumière lors même que le Soleil est à 180° au-dessous de l'horizon.

voilà ce qu'on peut conclure de là.

Soit A le dernier Rayon du Soleil qui vient frapper en B la surface de la Terre. Les parties du Globe comprises entre B et H ne sont pas éclairées par la lumière directe du Soleil : mais elles le sont par la lumière réfléchie sur une portion de l'atmosphère. — Soit C le point limite de l'atmosphère, on aura de la lumière jusqu'en H : mais tous les points situés au-delà de H seront dans l'obscurité.

l'inclinaison du Sol par rapport à l'horizon
Du point H, c'est $\angle CAH = \angle OH = 18^\circ$. Soit
 $\angle OIH = 90^\circ = \alpha$.

De cet angle, il est facile de conclure la hauteur de
l'atmosphère, si toutefois elle est finie. En effet,
en posant $IC = h$, le tr. rect. COH donne

$$(h+R) \cos \alpha = R$$

$$h = \frac{R(1 - \cos \alpha)}{\cos \alpha}$$

ou comme ainsi que $h = \frac{1}{100} R$.

Cette détermination ne peut acquiescer une certaine
précision que dans les pays où l'atmosphère est
très sèche. On voit alors très bien dans le ciel
la ligne de séparation de l'ombre et de la

Lumière.

ainsi les derniers couchers de l'atmosphère qui nous paraissent de la lumière
ne sont pas à une distance plus grande que 15 ou 16 lieues : 6300^m.

L'observation des couleurs horizontales est moins exacte et donne à peu près la
même valeur.

Pour expliquer cette limite de l'atmosphère, il faut remarquer que la
température varie d'un point à l'autre quand on s'élève, de sorte que les
densités de l'air ne varient pas en progression géométrique. On traite cette question
en mécanique, et l'on voit qu'il y a d'autres lois de diminution de la densité
qui conduisent au même résultat qu'à l'expérience.

Réfraction atmosphérique.

Dans la théorie de la Réfraction, on peut admettre sans erreur sensible que
la Terre est sphérique, et que l'atmosphère se compose de couches concentriques
de même densité, de telle sorte que la densité de l'atmosphère à une certaine
distance de la Terre est constante.

Théorème.

La Réfraction ne change pas l'azimut d'un rayon lumineux.

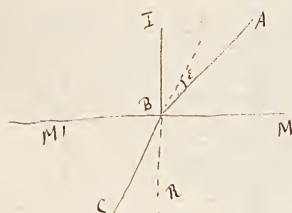
C'est évident.

Le rayon ne peut être dévié à droite ou à gauche du plan vertical
que pour des causes accidentelles. ainsi, fait-il un arc d'observateur pour de l'horizon
pendant de violents orages, ainsi qu'à la surface de la mer : car à cause
de la différence de température entre l'air et l'eau, il y a l'effet des
variations de densité d'un instant à l'autre.

Quand un astre est près de l'unité, la Réfraction est nulle; mais
à mesure qu'il s'en éloigne, elle va en augmentant. Pour le rayon lumineux
arriver alors les couches atmosphériques sous une incidence de plus en
plus grande, et la déviation doit être aussi de plus en plus grande.

En effet soit m l'indice de Réfraction du 2^e milieu par rapport

au premier, n étant que l'indice de l'Unité. Soit AB le rayon incident, BC le rayon réfracté, ABE l'angle d'incidence = α , ABC l'angle de réfraction = $\beta = \alpha - \epsilon$. on aura donc



$$\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \epsilon)} = n$$

$$n(\sin \alpha \cos \epsilon - \sin \epsilon \cos \alpha) = n$$

et approximativement

$$n(\sin \alpha - \epsilon \cos \alpha) = \sin \alpha$$

$$\epsilon = \frac{n-1}{n} \operatorname{tg} \alpha$$

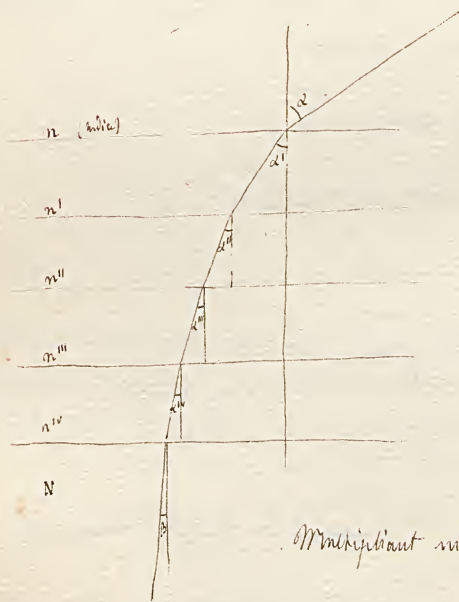
on voit donc que ϵ croît avec l'angle α .

La réfraction produite pour chaque couche augmentant quand l'astre s'éloigne de l'unité, il en est de même évidemment pour la réfraction totale. Si l'astre s'éloigne plus de l'unité, on peut supposer les diverses couches d'air qu'il traverse comme sensiblement parallèles, et le calcul de la réfraction est facile à faire.

En effet, il suffit de se rappeler ce principe d'optique :

Si plusieurs milieux sont terminés par des plans parallèles, l'angle de réfraction à la sortie ne dépend que de l'angle d'incidence à la surface du 1^{er} milieu, et de l'indice de réfraction du 1^{er} milieu par rapport au dernier.

En voici la démonstration.



Designons par n, n', n'', n''', n'', N les indices de réfraction des divers milieux par rapport au vide ($n < n' < \dots < N$). Nous aurons

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{n'}{n}$$

$$\frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha''} = \frac{n''}{n'}$$

$$\frac{\sin \alpha''}{\sin \alpha'''} = \frac{n'''}{n''}$$

$$\frac{\sin \alpha'''}{\sin \alpha'''} = \frac{n'''}{n''}$$

$$\frac{\sin \alpha'''}{\sin \beta} = \frac{N}{n''}$$

car, l'on a

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{n}$$

Multippliant membre à membre, on obtient la relation simple

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{N}{n}$$

Et n'est donc pas à l'occuper de la constitution ni des indices de réfraction des couches intermédiaires.

appliquons maintenant cela à l'atmosphère.

Soit A la distance verticale apparente de l'astre, A_0 la distance verticale vraie, λ la réfraction, c.à.d. $\lambda = A_0 - A$. Le rayon lumineux S sort du vide pour lequel $n = 1$, et après avoir décrit une courbe, arrive en O à l'observateur. Soit N l'indice de réfraction qui se rapproche au lieu de l'observation. — on aura, d'après le même procédé, (voir la fig.)

$$\frac{\sin A_0}{\sin A} = \frac{N}{1} = N.$$

et, comme par hypothèse, A_0 et A sont de très petits angles,

$$\frac{A_0}{A} = N \quad A_0 = NA$$

$$A_0 - A = (N-1)A = \Delta$$

on peut donc facilement faire la correction quand on connaît N .

Pour déterminer $N-1$ pour chaque observation, nous avons quelconque donnée le nom de puissance réfractive à la quantité n^2-1 . — Cette quantité varie proportionnellement à la densité ρ , De sorte que l'on a $n^2-1 = c\rho$. — Mais on a entre la hauteur du baromètre, la densité d'air, son coefficient de dilatation, et la température, la relation

$$h = K\rho(1+\mu\theta) \quad K = \text{const.}$$

Car $\rho : \rho' :: h/(1+\mu\theta) : h'/(1+\mu\theta)$ d'où l'on tire $\frac{\rho}{\rho'} = \frac{h(1+\mu\theta')}{h'(1+\mu\theta)}$ et par suite $\frac{\rho(1+\mu\theta)}{h} = \frac{\rho'(1+\mu\theta')}{h'} = \text{const.}$ ($\mu = \text{coef. de dilat.}$)

Donc

$$n^2-1 = \frac{c h}{K(1+\mu\theta)}$$

Il suit de là que, connaissant la puissance réfractive pour une température et une pression q. q. on pourra la calculer pour d'autres conditions. — Soit n_0^2-1 la puissance réfractive pour $h_0 = 0,76$ et $\theta_0 = 0^\circ$.

$$n_0^2-1 = \frac{c \cdot 0,76}{K}$$

d'où

$$\frac{c}{K} = \frac{n_0^2-1}{0,76}$$

et par suite

$$n^2-1 = (n_0^2-1) \frac{h}{0,76} \cdot \frac{1}{1+\mu\theta}$$

Cette quantité n est très peu différente de l'unité. Car pour les circonstances normales à la surface de la terre, $n_0 = 1,000294$. — on peut donc poser $n = 1 + \varepsilon$. $n^2-1 = (n+1)(n-1) = (2+\varepsilon)\varepsilon$, ou bien, en négligeant les carrés, $n^2-1 = 2\varepsilon = 2(n-1)$. — Substituant, on a l'équation à peu près exacte.

$$n-1 = (n_0-1) \frac{h}{0,76} \cdot \frac{1}{1+\mu\theta}$$

La quantité spécifique $N-1$ est donc véritablement proportionnelle à la pression et en raison inverse du diamètre de l'arc. $1+\mu\theta$. — Il suffit donc pour faire la correction 1°. de mesurer la distance zénithale apparente, 2°. d'observer le barom. et le therm.

Cette manière d'opérer donne des résultats assez exacts tant que la hauteur zénithale ne dépasse pas 90° .

Pour $h = 0,76$ et $\theta = 0$, on a $N-1 = \frac{1}{3600}$.

Pour $h = 0,76$ et $\theta = 16$ — $N-1 = \frac{1}{3600}$.

Le dernier résultat, qui est le pour des circonstances peu éloignées de celles où l'on observe habituellement — donne une règle très simple. Car $3600 = 60^2$. Donc $\frac{1}{60^2} = 1''$. — Donc il faut ajouter une seconde pour 3600 pour corriger les effets de la réfraction.

Quand la distance d'altitude de l'astre dépasse 30° , la formule précédente donne des résultats inexacts. - Nous allons indiquer le principe de la méthode de Laplace.

Choisissons la trajectoire décrite par le rayon lumineux? - et étudions deux couches consécutives de l'atmosphère. - Soient MM' , $m'm''$ deux éléments de la courbe rapportée à la verticale OI comme axe principal.

$$\text{Soit } MOI = \theta, \quad m'OI = \theta + \Delta\theta$$

n indice de Réfraction absolue pour la 1^{re} couche
 $n + \Delta n$ celui de la 2^e couche.

$$M'MA = \alpha$$

$$m'm'A' = \alpha + \Delta\alpha$$

L'angle d'incidence de $M'M'$ sur la 1^{re} couche est
 $m'm'A' = \alpha + \Delta\alpha$. L'angle de Réfraction est
 $OM'M = M'MA - M'OM = \alpha - \Delta\theta$.

Nous aurons donc

$$\frac{\sin(\alpha + \Delta\alpha)}{\sin(\alpha - \Delta\theta)} = \frac{n}{n + \Delta n}$$

ou bien

$$(\sin\alpha \cos\Delta\alpha + \cos\alpha \sin\Delta\alpha)(n + \Delta n) = n(\sin\alpha \cos\Delta\theta - \cos\alpha \sin\Delta\theta)$$

Remplaçant $\cos\Delta\alpha$ par 1, $\sin\Delta\alpha$ par $\Delta\alpha$, $\cos\Delta\theta$ par 1, $\sin\Delta\theta$ par $\Delta\theta$, nous négligeons les termes du 2^e ordre, et comme nous passons au limite à la limite, l'équation sera Exacte.

$$(n + \Delta n)(\sin\alpha + \Delta\alpha \cos\alpha) = n(\sin\alpha - \Delta\theta \cos\alpha)$$

ou

$$\Delta n \sin\alpha + n \Delta\alpha \cos\alpha = -n \cos\alpha \Delta\theta$$

Passant à la limite

$$dn \sin\alpha + n \cos\alpha d\alpha = -n \cos\alpha d\theta$$

Mais on a

$$\tan\alpha = r \frac{dr}{dr}, \quad \sin d\theta = \frac{dr}{r} \tan\alpha, \quad \cos\alpha d\theta = \frac{dr}{r} \sin\alpha$$

Substituant

$$\sin\alpha dn + n \cos\alpha d\alpha = -n \frac{dr}{r} \sin\alpha$$

ou

$$\frac{dn}{n} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} d\alpha + \frac{dr}{r} = 0$$

Cette est l'équation différentielle de la courbe. - Elle s'intègre immédiatement.

$$\ln r + \ln \sin\alpha + \ln r = C$$

ou

$$nr \sin\alpha = C.$$

Cette équation est encore une équation différentielle du 1^{er} ordre, car elle contient $\sin\alpha$.

Il faut déterminer la constante C . - Pour cela, appelons A la distance d'altitude apparente de l'astre, c.à.d. la valeur de l'angle α pour le lieu de l'observation. Soit R le rayon de la Terre, N l'indice de Réfraction de l'air à la surface pour le point considéré. - on aura pour ce point:

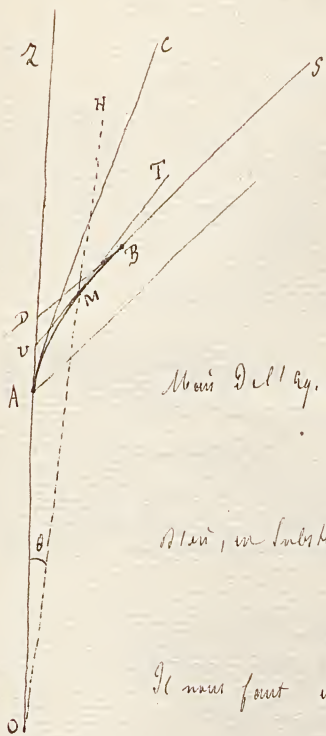
$$nr \sin\alpha = NR \sin A.$$

Donc

$$C = NR \sin A.$$

Cette équation différentielle de la trajectoire va nous permettre de

calculer la Réfraction. — En effet, Soit SB le Rayon Lumineux qui arrive du vide, BA la Trajectoire qu'il décrit dans l'atmosphère, OZ la verticale du point A où se trouve l'observateur.



Prenez un point M sur la Trajectoire, menez la Tangente MV en ce point, et le Rayon incident MO qui fait avec la verticale un angle θ . — Soit en outre comme tout-à-l'heure α l'angle TMH , et soit δ l'angle MVZ .

Pour exprimer $d\delta$, et nous pourrions le faire approximativement depuis le point A jusqu'au point B pour avoir $A_0 - A$, c'est-à-dire λ . La question sera donc ramenée aux quadratures.

on a

$$\delta = \theta + \alpha \quad \text{Donc} \quad d\delta = d\theta + d\alpha$$

Mais de l'eq. différentielle je tire

$$\sin \alpha = \frac{NR \sin A}{nr}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{n^2 r^2 - N^2 R^2 \sin^2 A}}{nr}$$

Alors, en substituant dans l'équation $d\theta = \frac{dr}{r} \cot \alpha$

$$d\theta = \frac{NR \sin A \, dr}{r \sqrt{n^2 r^2 - N^2 R^2 \sin^2 A}}$$

Il nous faut encore $d\alpha$. — Pour cela je différencie $\sin \alpha$.

$$\cos \alpha \, d\alpha = \frac{-NR \sin A (n \, dr + r \, dn)}{n^2 r^2}$$

$$d\alpha = - \frac{NR \sin A (n \, dr + r \, dn)}{nr \sqrt{n^2 r^2 - N^2 R^2 \sin^2 A}}$$

Substituant

$$d\delta = - \frac{NR \sin A \, dn}{n \sqrt{n^2 r^2 - N^2 R^2 \sin^2 A}}$$

Intégrant cette expression depuis A jusqu'à B , j'aurai λ

$$\lambda = -NR \sin A \int_A^B \frac{dn}{n \sqrt{n^2 r^2 - N^2 R^2 \sin^2 A}}$$

ou bien

$$\lambda = NR \sin A \int_1^N \frac{dn}{n \sqrt{n^2 r^2 - N^2 R^2 \sin^2 A}}$$

Si la loi de l'écartement de la densité de l'air et tout connu, on aura r en fonction de n , et la question serait ramenée à une simple quadrature.

Dans cette formule compliquée, il est facile de retrouver le résultat simple auquel nous sommes arrivés dans le cas où l'astère est près de l'unité. — En effet, A étant très-petit, nous pourrions sans grande erreur supprimer $\sin^2 A$.

$$\lambda = NR \sin A \int_1^N \frac{dn}{n^2 r}$$

n^2 est très-peu différent de l'unité, et r diffère peu de R : car les densités de l'atmosphère sont négligeables. Donc

$$\lambda = NR \sin A \int_0^N \frac{dn}{R} = N(N-1) \sin A$$

où l'on, en remplaçant $\sin A$ par A , et N par 1,

$$\lambda = (N-1) A.$$

En tenant l'intégrale précédente, l'aplan a fort vrai que, tant que la distance zénithale ne surpasse pas 80° , on peut obtenir une expression de la réfraction atmosphérique d'un corps qui ne dépend que de la température et de la pression, plus d'autres termes qui dépendent de la constitution de l'atmosphère, et qui sont négligeables si $A < 80^\circ$. et l'on a

$$\lambda = m \operatorname{tg} A \left\{ 1 + \frac{\frac{m}{2} (2 \cos^2 A + 1) - \frac{n \Delta}{R}}{\cos^2 A} \right\}$$

formule dans laquelle m désigne la hauteur du Baromètre, Δ le rapport de la densité du Mercure à la densité de l'air, à peu près 10500; et n est de la forme $\frac{Kk}{1+\mu\theta}$, K représentant un facteur qui doit être déterminé par l'observation.

Mais allons nous en tenir à cette Recurrence. — Soit n la place de m on met la valeur dans λ , λ prend la forme

$$\lambda = nk + pk^2$$

Soit Z la distance zénithale apparente d'un astre à son passage supérieur on trouve le Barom. le therm. et l'on calcule n et p pour cette observation. on aura alors pour la distance zénithale vraie

$$Z + nk + pk^2.$$

au passage inférieur, on calcule n' et p' . Soit Z' la dist. zénith. apparente. la distance vraie est

$$Z' + n'k + p'k^2$$

Donc

$$Z + Z' + (n+n')k + (p+p')k^2$$

désignera le double de la distance zénithale du pôle. — Répétant les mêmes observations et les mêmes calculs pour une seconde étoile, on aura

$$Z_1 + Z'_1 + (n_1+n'_1)k + (p_1+p'_1)k^2$$

et comme la distance zénithale du pôle est invariable, il faudra égaux ces deux expressions, ce qui donnera une Eq. du 2^d degré en k .

La formule ci-dessus est inexacte quand l'astre est trop près de l'horizon, et l'on doit le prévoir puisqu'il y a un facteur $\operatorname{tg} A$ qui devient très grand dans le voisinage de $A = 90^\circ$. — Cela tient à ce que les termes que nous avons négligés pour établir la formule ne sont plus négligeables dans cette hypothèse, et même deviennent fort grands, de manière à dériver l'expression même de $\operatorname{tg} A$.

On est obligé dans ce cas de faire sur la constitution de

Atmosphère d'après hypothèses. - Laplace a discuté ces hypothèses et, en partant de la plus probable, il a trouvé une formule qui s'accorde assez bien avec les observations. Mais il y a toujours un peu d'incertitude. Dans les situations ordinaires lorsque la distance zénithale approche de 90° .

Quand $z = 90^\circ$, $\theta = 10'$ et $h = 0,76$ on a $\lambda = 34'$.

L'effet de la Réfraction astronomique est d'élever les astres au-dessus de leur véritable position. - Et nous pourrions même voir ainsi le Soleil lorsqu'il est au-dessous de l'horizon. C'est ainsi qu'on a vu en 1780 la Lune s'éclipser par la Terre, bien que le Soleil fût encore à l'horizon. à la vérité, la Terre était déjà entre la Lune et le Soleil: mais la Réfraction les faisait voir au-dessus de l'horizon.

Ce phénomène explique aussi les apparences que présente le Soleil à son lever et à son coucher. Il semble aplati dans le sens vertical. Cela vient de ce que la Réfraction est plus intense pour le bord inférieur que pour le bord supérieur, et le Soleil paraît donc. - ces différences sont plus marquées quand on s'éloigne d'une mer montaigne voisine de la mer: on peut voir le Mont St. Pierre d'ici plus grand que le Mont St. Pierre d'ici, et, lorsqu'il est affecté de faibles variations accidentelles, l'astre prend des apparences très bizarres.

Refraction Terrestre.

Il y a un autre genre de Réfraction qu'il est important de considérer quand on s'occupe de mesures géodésiques. C'est celui où le Rayon lumineux, au lieu de traverser toutes les couches de l'atmosphère, n'en traverse que quelques unes: cette Réfraction n'influe comme la précédente que sur les distances zénithales des objets, et le Rayon apparent est dans le même plan vertical que le Rayon réel.

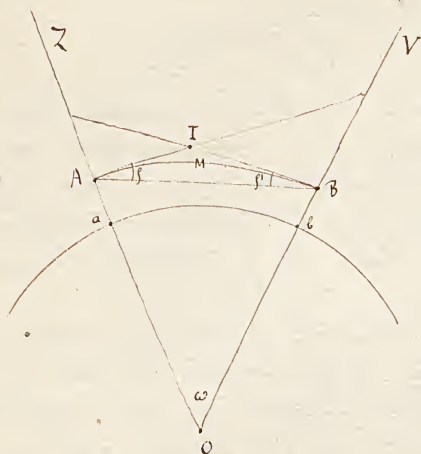
Soient deux points A et B situés un peu au-dessus de la surface de la Terre. - Les Rayons lumineux partant de A, au lieu de se propager en ligne droite, suivent une courbe, et l'effet de la Réfraction nous serait donné par le calcul précédent si nous connaissions la loi des variations des couches de A en B. - Mais les résultats de cette intégration seraient peu exacts à cause de l'incertitude qu'il y a sur les constitutions des couches inférieures de l'atmosphère, dont la densité varie à chaque instant.

on peut procéder par observation des distances zénithales réciproques.

Lancez un rayon lumineux rapproché pour que les couches d'air n'aient pas grande densité, deux observateurs placés, l'un en A, l'autre en B, déterminent alors indépendamment leurs distances

A ————— B

limitales. Il est évident que si l'observateur en A reçoit un rayon de B suivant la courbe AMB, l'observateur en B voit A suivant la même courbe. Les distances limitales apparentes seront donc les angles des tangentes AI, BI à AMB, avec les verticales correspondantes.



Soit $ZAI = Z$, $VBI = Z'$, et l'angle des deux verticales, et ρ et ρ' les réfractions pour les points A et B. — on a

$$ZAB = \rho + Z$$

$$OAB = \pi - (\rho + Z)$$

$$OBA = \pi - (\rho' + Z')$$

Alors

$$\omega + OAB + OBA = \pi = \omega + 2\pi - \rho - \rho' - Z - Z'$$

$$\rho + \rho' = \pi + \omega - Z - Z'$$

L'angle ω peut être connu, du moins approximativement, quand on connaît la distance des

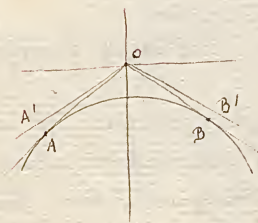
projections des points A et B sur la surface de la Terre. — En effet, on peut considérer cela comme un arc de grand cercle et, connaissant approximativement le rayon de la Terre, on en conclut l'angle ω . — Il est permis d'opposer ainsi : car l'angle ω est en général très-petit, et l'erreur qu'il y a dans l'évaluation du rayon terrestre n'a pas une grande influence. — Nous verrons dans la suite d'autres exemples de ce problème mixte. Dans le calcul des corrections, on suppose connues approximativement certaines quantités, qu'on peut calculer ensuite plus exactement au moyen de ces corrections elles-mêmes.

Admettons maintenant que $\rho = \rho'$. Cette supposition est assez justifiée car la trajectoire est très-peu courbée, et si, sur une courbe, on prend un arc très-petit, la corde de cet arc fait des angles sensiblement égaux avec les tangentes aux deux extrémités. — Il n'y a d'exception que lorsque la courbe a des courbures très-irrégulières.

On a alors

$$\rho = \frac{\pi}{2} - \frac{Z + Z' - \omega}{2}$$

Il y a un autre effet de la réfraction dont la connaissance est indispensable aux marins. — Nous avons vu qu'ils se servent de l'écartement pour mesurer la distance limitale du Soleil, et qu'ils prennent alors la hauteur inférieure du disque du Soleil et le bord apparent de la mer pour leurs observations. — Mais ce bord apparent de la mer est bien loin de coïncider avec le plan tangent à la surface terrestre au point de l'observation.



En effet, supposons qu'il n'y ait pas de réfraction : si l'on est sur la courbe de la Terre, le bord de la mer est au-dessous de l'horizon, et l'on pourrait, connaissant la hauteur du point de l'observation au-dessus du niveau de la mer, calculer cette dépression. Mais la réfraction terrestre influe encore sur la hauteur apparente du bord de la mer, et on peut se servir du plan tangent.

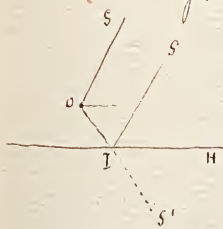
Wollaston a inventé un instrument avec lequel on peut mesurer la dépression. — avec cet instrument, on trouve l'angle apparent de deux ob. jets A et B situés aux extrémités d'une même diamètre de l'horizon apparent. Les rayons OA, OB, sont relevés en OA', OB', et l'on peut admettre dans les circonstances normales que ces deux effets sont égaux. De sorte que l'angle A'OB' retranché de 180° fera connaître le double de la dépression de l'horizon.

Dans une foule de circonstances, de température et de constitution de l'atmosphère, on a mesuré cette dépression, et l'on a ainsi construit des tables qu'on peut consulter quand on fait des corrections. — Néanmoins, il faut le dire, ces corrections offrent toujours une assez grande incertitude. car les dépressions peuvent être affectées de perturbations accidentelles.

Un moyen d'éviter ces erreurs est de se servir de ce que l'on appelle des horizons artificiels.

1°. Sur Terre :

on dispose une surface parfaitement horizontale, qui sera une mare de mercure ou un plan de glace bien dressé qu'on place perpendiculairement à l'axe de l'œil et d'un miroir à double d'air. — l'astre dont on veut mesurer la distance zénithale se réfléchit sur et parvient artificiellement, de sorte qu'on peut mesurer l'angle de deux rayons réfléchis situés dans une même droite S, l'astre sur la surface S'. — l'angle de ces deux rayons est le double de la hauteur de l'astre au dessus de l'horizon. — on observe et angle avec le sextant. Pour cela, on tient l'instrument à la main de manière que son limbe soit dans le plan vertical mené par l'astre. on observe directement S', et l'on fait tourner le grand miroir jusqu'à ce que l'astre S ou par double réflexion devienne confondu avec S'.



Grand ou petit pour horizon artificiel la surface du mercure, il faut qu'il soit renfermé dans un vase d'assez grandes dimensions en largeur et en longueur afin d'éviter la convexité de la surface produisant de la dépression le long des parois du vase. Il faut aussi empêcher le mercure sous une couche de verre pour le soustraire aux agitations de l'air. les lames de verre devront être à faces bien parallèles.

2°. Sur mer :

on suspend le vase qui renferme le mercure pour le rendre commun sous le nom de Suspension de Cardan, afin d'avoir une surface sensiblement indépendante des agitations de la mer et du navire.

Il est inutile de tenir compte, dans l'emploi des tables de Réfrac. tion, de la quantité d'eau contenue dans l'air. — En effet, la vapeur d'eau peut être regardée comme remplaçant une certaine quantité d'air. Supposons que la puissance réfringente de l'eau d'égale densité la même à l'état de vapeur, avec la seule diminution dans le rapport des densités. on pourra calculer quelle serait la réfraction produite par une vapeur aqueuse d'une densité égale à celle de l'air. on trouve ainsi que cette vapeur réfracterait un peu plus que

l'air atmosphérique. — Mais la vapeur d'eau suspendue dans l'air n'a pas une densité égale à celle de l'air; elle n'en est que les $\frac{8}{9}$, un peu plus, et habituellement. — Il faut donc nommer à la forme l'action Réfringente de la vapeur d'eau pour la rendre conforme aux effets qu'elle produit réellement dans l'atmosphère. — Cette force Réfringente ainsi réduite se trouve exactement égale à celle de l'air sous la même pression.

ainsi, dans le calcul des Réfractions, on peut se dispenser de distinguer ce qui appartient à l'air et à la vapeur, et supposer que toute la déviation du rayon lumineux est produite par un même l'air atmosphérique à la pression indiquée par le Baromètre.

Mesure Exacte des Dimensions de la Terre.

La Terre, comme nous l'avons vu, a la forme d'un Sphéroïde, mais jusqu'à présent, nous ne savons rien sur la nature de sa surface. — Il importe donc de définir rigoureusement ce qu'on entend par Pôle, Latitude, Méridien, sans faire aucune hypothèse sur sa constitution.

On appelle *Verticale* d'un lieu la normale à la surface des mers prolongée jusqu'en ce lieu au dessus des continents.

Sur une surface Convexe, il y a toujours deux points pour lesquels la normale est parallèle à une direction donnée.

Nous désignerons par *Pôles* de la Surface Terrestre les points de cette surface pour lesquels les normales sont parallèles à l'axe de la Sphère céleste.

Par *Méridien Terrestre*, on entend le lieu des points de la Surface pour lesquels la verticale est parallèle à un même méridien Céleste. — On voit par cette définition que tous les méridiens passent par les pôles, et que ces méridiens sont généralement des lignes à double courbure.

Par *Plan Méridien* d'un lieu, on entend le plan qui contient la verticale de celui-ci et la parallèle à l'axe de la Sphère Céleste. — Ce plan est évidemment parallèle au plan du méridien céleste correspondant au lieu dont il s'agit.

Si l'on prend à la surface de la Terre un premier méridien pour origine, la Longitude des points situés sur un second méridien sera l'angle compris entre les plans des deux méridiens Célestes correspondants. Ces longitudes se comptent de 0 à 180°, à l'E. et à l'O.

L'angle que la verticale d'un lieu fait avec le plan de l'équateur Céleste est la Latitude de celui-ci. — On peut encore dire que c'est le complément de l'angle de la verticale du lieu avec l'axe de la Sphère Céleste.

Une *Parallèle Terrestre* est le lieu géométrique des points qui ont la même Latitude. C'est une ligne à double courbure.

En particulier, le lieu des points pour lesquels la latitude est zéro est l'*Equateur Terrestre*.

Si l'on suppose que la Terre soit de révolution autour d'un axe parallèle à l'axe de la Sphère Céleste, les définitions précédentes se simplifient.

Les Pôles sont les extrémités de l'axe de Révolution.

Un *Méridien* est la courbe d'intersection de la Surface avec un plan passant par l'axe de Révolution. On voit aisément que les normales aux différents points de cette courbe sont parallèles à un même méridien Céleste.

Une *Parallèle* est un cercle dont le plan est perp. à l'axe de Révolution. Sur tous les points de ce cercle, les normales font le même angle avec l'axe : leur latitude est donc la même.

Certes ces définitions deviennent encore un peu plus simples si la surface de la Terre est Sphérique.

Supposons la Terre Sphérique, et proposons nous de mesurer son rayon d'un de ses pôles, il suffit de connaître la longueur d'un arc de grand cercle correspondant à un angle au centre connu. Et comme le Méridien est de tous les grands cercles, le plus facile à trouver et à tracer, c'est un arc de méridien qu'on a choisi, à mesurer.

Supposons qu'on puisse exécuter cette opération dans de grandes plaines, comme on avait commencé à le faire en Pensylvanie, où Mason et Dixon, en 1764, ont tracé une ligne Méridienne, et voyons la suite de l'opération à exécuter.

On s'établit dans une station A; on y place une lunette mobile dans un axe horizontal, l'axe optique étant perp. à cet axe, et on la dirige de manière que cet axe optique parcoure le plan du méridien du lieu. Cette opération est analogue à l'établissement d'une lunette méridienne.

Cela fait, à une certaine distance vers le Nord, on place une mire B. On suppose qu'on puisse l'apercevoir dans la lunette méridienne. Puis, on se transporte en B. on y dirige la lunette de manière à viser A; on se retire vers le N. tout pour about, de façon à placer une nouvelle mire en C on fait la même chose qu'en B, et l'on obtient ainsi une suite de points A, B, C, D, E, ... qui forment partie du Méridien du point A de la Terre tant Sphérique ou de Révolution. — En effet, d'après la manière d'opérer, on est sûr que le 1^{er} élément AB est dans le Méridien du point A, qu'il en est de même du 2^e élément et des suivants.

Mais si la Terre était une surface quelconque, cela ne serait plus vrai: la ligne ainsi tracée serait seulement tangente en A au méridien: elle serait une ligne Géodésique, c.à.d. une ligne jouissant de la propriété d'être la plus courte entre deux des points.

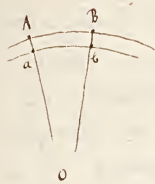
En effet, en B, nous nous rendons l'axe de la lunette horizontale, et nous nous trace en deux éléments AB, BC dans un plan perpendiculaire à l'axe, c.à.d. dans un plan vertical. — ainsi le plan de deux éléments consécutifs, qui est le plan osculateur de la courbe, est vertical, c.à.d. qu'il contient la normale à la surface: c'est donc une ligne Géodésique.

Revenons à l'hypothèse que la Terre est Sphérique, et continuons l'opération. — Il nous faut la longueur de l'arc de grand cercle que nous venons de tracer, et l'angle des rayons extrêmes qui le comprennent.

Cet angle n'est pas difficile à mesurer: c'est la différence des hauteurs géométriques du pôle pour les points extrêmes.

Quant à la mesure de l'arc de cercle, elle se fait à l'aide de règles qu'on place les unes au bout des autres, et qui sont guidées de manière qu'on puisse s'assurer qu'on les a bien placés dans la direction voulue. On doit en avoir les prévisions du Soleil et d'une très grande altération. On emploie particulièrement une correction facile. Enfin il faut avoir soin d'être les axes horizontaux.

Rem. importante. — le qu'il faut mesurer; c'est non pas AB, sa projection ab sur la surface de la mer. — voyons comment on mesure ab de A B.



Supposons d'abord que les points A et B soient à la même hauteur h au-dessus de ce niveau. — on aura

$$\frac{ab}{AB} = \frac{R}{R+h}$$

$$ab = AB \cdot \frac{R}{R+h}$$

et, comme on a déjà une valeur approchée du Rayon de la Terre, on pourra faire cette correction.

Si les points A et B sont à une hauteur différente, et $Aa > Bb$, on peut imaginer pour le milieu de l'arc AB un arc de cercle mn. C'est le diamètre de cet arc qui a été mesuré dans les opérations précédentes. On en conclura ab comme suit. — d'abord, en prenant

$$h = \frac{Aa + Bb}{2}$$

Nous verrons bientôt comment se trouvent ces grandeurs.



Soit ad l'arc mesuré, α l'angle au centre. — on aura

$$ad : \pi R :: \alpha : 360$$

$$R = \frac{360 \cdot ad}{\pi \alpha} = \frac{180 \cdot ad}{\pi \cdot \alpha}$$

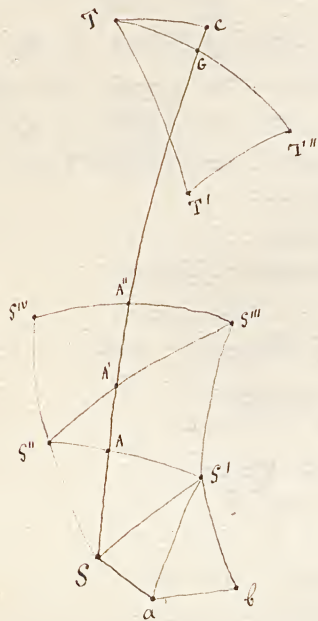
Lorsque la nature du terrain ne permet pas d'employer cette méthode, on en fait une autre qui permet de déterminer par des angles seuls trigonométriques la direction du méridien, et de mesurer en même temps la longueur. — C'est cette méthode qu'on emploie pour toutes les grandes opérations géodésiques.

On ne calcule alors la ligne géodésique qu'à l'aide de procédés trigonométriques dans lesquels on n'a à mesurer directement que des angles, opérations qui l'emploi du cercle répétiteur rend susceptible de la plus grande précision. Cette mensuration se fait sans que la ligne soit tracée, ni même indiquée par des points placés de distance en distance sur sa direction comme nous l'avons supposé : — il suffit de connaître la direction du premier point de cette ligne.

Le procédé consiste à former une série de triangles dont on connaît les éléments, et qu'on dirige de manière qu'ils soient traversés par la ligne qu'on veut mesurer. — on calcule trigonométriquement les segments de cette ligne compris dans les triangles, et l'on en conclut la longueur de la ligne. — Dans le cours des opérations, on calcule les segments que la ligne détermine sur différents côtés des triangles, de sorte que des points de la ligne se trouvent ainsi connus, de distance en distance, et la ligne est déterminée comme elle est par les opérations directes dont nous avons parlé.

Pour déterminer les éléments des triangles, il suffit de connaître une base prise arbitrairement, et dont on aura mesuré la longueur à la manière ordinaire, en portant des règles par bout à bout, et en ayant soin de tenir compte des variations de longueur de ces règles causées par

les changements de température. ... Cette mesure direct d'une base est une des opérations les plus vitales de la Géodésie. — Ensuite, on n'a plus qu'à mesurer les angles et des calculs trigonométriques à effectuer pour mesurer les triangles consécutifs, et déterminer la longueur des segments qu'ils interceptent. — L'ensemble des triangles ainsi tracés forme une triangulation ou un canevas trigonométrique.



Soit SAA' ... la direction du méridien passant par le point S , et $SS'aa''$... la chaîne des triangles qu'on a choisis, A, A', \dots les points où la direction (non tracée) du méridien vient à rencontrer les côtés des triangles; et T la dernière station. Au point T on imagine un parallèle qui coupe en C le méridien. La longueur SC est celle qu'il s'agit de mesurer.

Soit ab la base mesurée sur place pour l'un des, un moyen de laquelle on peut calculer facilement SS' . Elle est supposée réduite au niveau de la mer, et tous les angles sont réduits à l'horizon. En mesurant les triangles qui relient cette base à SS' sont donc formés on peut pour pouvoir les considérer comme une suite de triangles sans erreur sensible. — on mesure au théodolite l'angle de SS' avec la direction du méridien, et l'on calcule SA dans le triangle SAS' dont un côté et deux angles sont connus. Le triangle, en général, est trop étendu pour qu'on

puisse le mesurer comme tel. — On le divise d'après notre méthode que nous indiquerons plus tard. — Connaissant SA , le triangle sphérique SAS'' nous donnera la longueur $S''A$. D'autre part l'angle $SAS' = S''AA'$, qui le méridien est plan. — Donc dans le triangle $S''AA'$, on pourra calculer AA' . — Et ainsi de suite.

Quant à la dernière station, l'arc de parallèle qu'on mène par le point se confond sensiblement avec l'arc de grand cercle perp. au méridien aboutissant au point T . on pourra donc tracer approximativement le triangle TCB comme un triangle sphérique rectangle en C .

C'est la marche générale qu'il faut suivre dans le tracé d'un méridien. — Nous allons faire maintenant diverses remarques.

1. Observation sur le choix des Stations, et Réduction des angles au centre de Station.

Lorsque les Stations qu'on choisit sont des objets visibles de loin, comme un clocher, la flèche d'un bâtiment élevé, il n'y a d'autre difficulté que de mesurer les angles au centre de Station: car il est impossible, pour mesurer ces angles, de transporter en ces points mêmes, ou bien de se placer juste aux points qu'on veut projeter. — on est obligé de se mettre à quelque distance, et de

Donnée De l'observation les Résultats qu'on ait obtenus Dans le premier cas.
cette correction est connue sous le nom de Correction Des angles au
Centre De Station.

C'est un problème connu De Trigonométrie Sphérique.

Quant aux Stations qui ne sont pas de points Géométriques, on a recours à
Des Signaux artificiels.

2°. Remarque Sur la ligne que nous avons tracée à la Surface De la Terre,
en supposant cette Surface quelconque, et non plus Sphérique.

Dans ce cas, la ligne SAA' n'est plus plane; mais elle est inscrite
Dans une infinité de petits cercles planes $SS'S''$, ... circonscrits à la Surface
De la Terre, et de plus, Deux Éléments consécutifs font Des angles au sommet
égaux avec une même arête de cette Surface polyédrique. — Il est facile De
voir qu'une ligne ainsi construite est une ligne Géométrique De ce polyèdre:
car si on brule successivement les diverses faces Dans un même plan, la
ligne en question se développera suivant une ligne droite.

3°. Remarque Sur le calcul Des Triangles Sphériques De la Triangulation.
Méthode De Legendre.

Comme les Triangles tels que $SS'S''$ sont un peu étendus, quelques-uns
souvent calculé les angles réduits à l'horizon, et quel plan tangent aux
différents sommets n'est pas le même, il est convenable De les calculer en
supposant la Terre Sphérique.

Dans une aussi petite étendue, l'hypothèse est permise, et, quelle que
soit la forme réelle De la Terre, les erreurs qui en résulteront seront infiniment
petites. — À notre point, la correction que nous allons faire contiendra
le Rayon De la Terre, ou plutôt une valeur approchée De ce Rayon. Mais comme
le Rayon ne multiplie que une quantité très-petite, les erreurs seront né-
gligeables.

Soient A, B, C les 3 angles, a, b, c les trois côtés D'un Triangle
Sphérique, α, β, γ les 3 côtés correspondants Dans une sphère De Rayon 1.
on aura

$$\alpha = \frac{a}{R} \quad \beta = \frac{b}{R} \quad \gamma = \frac{c}{R}$$

et en substituant Dans la formule fondamentale De la Trigonométrie Sphérique,

$$\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} + \sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} \cos A$$

Développons en séries :

$$1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} = \left(1 - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4}\right) \left(1 - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{c^4}{24R^4}\right) + \left(\frac{b}{R} - \frac{b^3}{24R^3}\right) \left(\frac{c}{R} - \frac{c^3}{24R^3}\right) \cos A$$

Développons les calculs, effaçons 1 de part et d'autre, et multiplions par $2R^2$:

$$-a^2 + \frac{a^4}{12R^2} = -c^2 + \frac{c^4}{12R^2} - b^2 + \frac{b^4}{12R^2} + \frac{b^2c^2}{2R^2} + \left(2bc - \frac{b^2c}{3R^2} - \frac{bc^2}{3R^2}\right) \cos A$$

$$a^2 - \frac{a^4}{12R^2} = b^2 + c^2 - 2bc \cos A - \frac{b^4 + c^4}{12R^2} - \frac{b^2c^2}{2R^2} + \frac{bc(b^2 + c^2)}{3R^2} \cos A$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A + \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2 + 4bc(b^2 + c^2) \cos A}{12R^2}$$

Soient $A' B' C'$ les angles du triangle sphérique dont les côtés seraient a, b, c . On aurait

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A'$$

Retenant

$$2bc(\cos A - \cos A') = \frac{a^4 - b^4 - c^4 + 6b^2c^2 + 4bc(b^2 + c^2) \cos A}{12R^2}$$

on voit d'un que $\cos A$ diffère bien peu de $\cos A'$ puisque leur différence est une fraction où R^2 entre en dénominateur.

et on a

$$\cos A - \cos A' = 2 \sin \frac{A' - A}{2} \sin \frac{A' + A}{2}$$

à ce place de $\sin \frac{A' - A}{2}$ mettons donc $\frac{A' - A}{2}$, nous négligeons une quantité infiniment petite par rapport à $A' - A$; de même, à la place de $\sin \frac{A' + A}{2}$ mettons $\sin A'$. Nous aurons

$$2bc(A' - A) \sin A' = \frac{a^4 - b^4 - c^4 + 6b^2c^2 + 4bc(b^2 + c^2) \cos A'}{12R^2}$$

en remplaçant $\cos A'$ par $\cos A$, ce qui est toujours une erreur d'ordre $\frac{1}{R^4}$.

Remarquons que $bc \sin A' = 2$ fois la surface du triangle rectiligne dont nous avons parlé, et dont nous désignerons par S la surface.

$$A' - A = \frac{a^4 - b^4 - c^4 + 4bc(b^2 + c^2) \cos A' - 6b^2c^2}{48 S \cdot R^2}$$

Mais on a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A'$$

$$2bc \cos A' = b^2 + c^2 - a^2$$

Par suite

$$\begin{aligned} A' - A &= \frac{a^4 - b^4 - c^4 + 6b^2c^2 + 2(b^2 + c^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{48 S \cdot R^2} \\ &= \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2}{48 S \cdot R^2} \end{aligned}$$

Mais on a

$$S^2 = \frac{1}{16} (-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2)$$

Donc

$$A' - A = -\frac{16 S^2}{48 S \cdot R^2}$$

$$A - A' = \frac{S}{3 R^2}$$

on aurait pu d'ailleurs se passer de la formule qui donne la surface du triangle rectiligne, et remarquer que $A' - A$ est symétrique par rapport à a, b, c . Donc

$$A' - A = B' - B = C' - C$$

Par suite chacune de ces différences est égale au tiers de leur somme,

Soit

$$\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} (A+B+C)$$

Or la surface du triangle sphérique ABC est donnée par la formule

$$S' : \frac{\pi R^2}{2} :: A+B+C-\pi : \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{S'}{R^2} = A+B+C-\pi$$

on a donc

$$A-A' = \frac{S'}{3R^2}$$

$$B-B' = \frac{S'}{3R^2}$$

$$C-C' = \frac{S'}{3R^2}$$

et comme S' ne dépend de S que d'un infiniment petit d'ordre $\frac{1}{R^2}$,

$$A-A' = \frac{S}{3R^2}$$

$$B-B' = \frac{S}{3R^2}$$

$$C-C' = \frac{S}{3R^2}$$

qui est le résultat précédent, mais obtenu plus rapidement.
ainsi l'on a

$$A' = A - \frac{S}{3R^2}$$

$$B' = B - \frac{S}{3R^2}$$

$$C' = C - \frac{S}{3R^2}$$

$$A' + B' + C' = A + B + C - \frac{S}{R^2}$$

Cette quantité $\frac{S}{R^2}$ s'appelle l'excès sphérique.

Théorème.

Si l'on considère un triangle sphérique très peu courbe, et le triangle rectiligne dont les côtés sont égaux en longueur à ceux du triangle sphérique, les angles de ce triangle rectiligne diffèrent de ceux du triangle sphérique d'une quantité constante qui est le tiers de l'excès sphérique.

Ci théorème est d'une grande utilité dans le calcul des triangles du Réseau trigonométrique.

Ces triangles sont de plusieurs espèces.

Grand l'un trois sommets sont trois stations, comme $SS'S''$, on peut calculer facilement l'excès sphérique en faisant la somme des trois angles et retranchant 2 droits.

Parfois il s'agit d'un triangle tel que $SS'A$, dans lequel on ne connaît qu'un côté et deux angles adjacents, on résout le

Triangle comme Rectiligne, ce qui donne S , pour l'arc $\frac{S}{R}$. — on pose alors

$$S_1 = S - \frac{S}{3R}$$

$$S'_1 = S_1 - \frac{S}{3R}$$

et l'on trouve le Triangle comme Rectiligne, ce qui donne SA .

4°. — Particularité pour le calcul du petit Triangle qui détermine le dernier élément du Méridien.



Je foudrait mener par le point T un parallèle TE . Mais alors on n'aurait pas un Triangle Sphérique. alors on mène un arc de 90° perpendiculaire TF . on calcule FH dans le Triangle Sphérique Rectangulaire TFH . Qui on retranche la distance FE que nous allons calculer.

Soit P le pôle, PT le méridien du point F . on a

$$PT = PE.$$

$$EF = EP - PF = PT - PF$$

de Triangle Sphérique Rectangulaire PTF on a

$$\cos TP = \cos TF \cos PF$$

$$\cos PF = \frac{\cos PT}{\cos TF}$$

Soit $PT = \alpha$, $TF = \beta$, $PF = \gamma$. D'où $EF = \alpha - \gamma$.

$$\cos \gamma = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

$$\cos \gamma - \cos \alpha = 2 \sin \frac{\alpha - \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{\cos \alpha (1 - \cos \beta)}{\cos \beta} = \frac{2 \cos \alpha \sin^2 \frac{\beta}{2}}{\cos \beta}$$

or $\alpha - \gamma$ est très-petit. Nous aurons donc

$$(\alpha - \gamma) \sin \alpha = \frac{\cos \alpha \cdot \beta^2}{2}$$

car $TF = \beta$ est aussi très-petit.

$$\alpha - \gamma = \frac{\beta^2}{2 \cos \alpha}$$

En opérant ainsi à diverses Latitudes, on trouve pour l'arc SA des valeurs différentes. Mais l'on conclut que le méridien n'est pas un arc. Mais aux mêmes latitudes, sur différents méridiens, on trouve des valeurs sensiblement concordantes; et si l'on outre voit, si l'on mesure des arcs de parallèles, on trouve que sur un même parallèle des arcs correspondants à des différences égales en longitude sont sensiblement égaux. D'où l'on conclut que la Terre n'est pas sphérique, mais qu'elle est

-Néanmoins De Révolution: De sorte que les lignes désignées que nous avons
trouvées sont de véritables Méridiens.

Il faut bien faire voir la forme De ce méridien, nous citons quelques
nombres.

On a mesuré au Pérou (Bouguer et Lacondamine) un arc dont la
distance moyenne au pôle étoit de $48^{\circ} 29' 39''$, et l'on a trouvé pour
l'arc de 1° .

56737^T

Dans l'Inde, un anglais a mesuré un arc de Méridien dont la dist. moy. au
pôle étoit $77^{\circ} 27' 39''$. Il a trouvé

56762^T

Delambre et Méchain en France, Arago et Biot en Espagne, ont mesuré l'arc
de méridien d'Alcalá de Henares à Dunkerque, dont la dist. moyenne au
pôle est $23^{\circ} 51' 54''$. On a

57025^T

Essex et Angleterre, $37^{\circ} 57' 40''$

57066^T

En Japon (Clairault et Bousquet), pour $23^{\circ} 39' 50''$

57196^T

Il est évident que la longueur de l'arc de 1° va en diminuant Du
Pôle à l'Equateur, et que l'inverse, que la courbure du méridien va en augmen-
tant. — En effet, l'arc de 1° est un arc tel que les normales menées aux
extrémités forment un angle de 1° . On aura donc pour la courbure moyenne
l'arc pourit avec $\frac{ds}{\sin \theta}$. or ds va en diminuant Du Pôle à l'Equateur.
Donc la courbure moyenne du méridien va en augmentant, et le rayon
de courbure diminue.

Cela s'accorde évidemment avec l'aplatissement De la Terre aux pôles. En effet,
pour tracer le méridien à l'aide d'un schéma d'arcs de cercle, il faudra
que les rayons de ces arcs aillent toujours en augmentant De l'Equateur
aux pôles, où le rayon sera maximum.

Soit D le centre de courbure Du Pôle P. on a

$$CC'CD < CO + OD$$

Donc

$$AC + CC'CD < AO + OD$$

Mais on peut écrire

$$AC + CC' + C'C'' + C''D < AO + OD$$

et l'on a

$$AC = A'C$$

$$AC + CC' = A'C' = A''C'$$

$$AC + CC' + C'C'' = A''C'' = A'''C''$$

$$AC + CC' + C'C'' + C''D = A'''C''D = PD$$

Donc

$$PD < AO + OD$$

$$PO < AO$$

ainsi la distance Du pôle à l'Equateur est plus petite que celle De l'Equa-
teur à l'axe.

Il faut en outre savoir pourquoi elle est aplatissement à l'Equa-

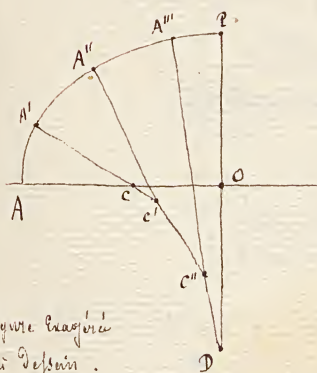


Figure tracée
à l'équerre.

Or le calcul fait sur les données expérimentales montre que la courbure est proportionnellement au carré du sinus de la latitude, de sorte que si f_0 est le rayon d'égale courbure, et f le rayon à la latitude λ , on a.

$$f = f_0 + e \sin^2 \lambda$$

Or ceci est une des propriétés d'une ellipse peu aplatie. Car on a pour l'ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

$$a^2 - b^2 = a^2 e^2$$

$$f = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}$$

Pour y introduire la latitude, il faut remarquer qu'elle est égale à l'angle de la normale avec l'axe des x . on aura donc, en appelant λ cette latitude.

$$\tan \lambda = \frac{a^2 y}{b^2 x} = \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda}$$

Donc

$$\frac{ay}{b \sin \lambda} = \frac{bx}{a \cos \lambda} = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \sin^2 \lambda + a^2 \cos^2 \lambda}}$$

et par suite

$$y = \frac{b^2 \sin \lambda}{\sqrt{b^2 \sin^2 \lambda + a^2 \cos^2 \lambda}}$$

$$x = \frac{a^2 \cos \lambda}{\sqrt{b^2 \sin^2 \lambda + a^2 \cos^2 \lambda}}$$

Substituant, l'on a

$$a^4 y^2 + b^4 x^2 = \frac{a^4 b^4 \sin^2 \lambda + a^4 b^4 \cos^2 \lambda}{b^2 \sin^2 \lambda + a^2 \cos^2 \lambda} = \frac{a^4 b^4}{b^2 \sin^2 \lambda + a^2 \cos^2 \lambda}$$

$$(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{a^6 b^6}{(b^2 \sin^2 \lambda + a^2 \cos^2 \lambda)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f = \frac{a^2 b^2}{(b^2 \sin^2 \lambda + a^2 \cos^2 \lambda)^{\frac{3}{2}}}$$

Remplaçant b^2 par $a^2(1-e^2)$, et élevant au carré

$$f = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{3}{2}}}$$

on développe en série,

$$f = a(1-e^2) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \lambda \right)$$

$$f = a \left\{ 1 + e^2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 \lambda - 1 \right) \right\}$$

on négligeant e^4 .

On voit donc que la méridienne est une ellipse, mais une ellipse très aplatie.

On voit en outre que, pour déterminer e et a , il suffirait de déterminer pour deux latitudes différentes l'axe de 1° . — Car on a en cos.

Aurait deux valeurs de l'angle de courbure, et par suite deux équations entre a et e . - Elles seraient

$$p = a(1-e^2) + \frac{3}{2}ae^2 \sin^2 \lambda$$

$$p' = a(1-e'^2) + \frac{3}{2}ae'^2 \sin^2 \lambda'$$

ou bien de calculer directement e , en supposant l'aplatissement, qui est égal à

$$\frac{a-b}{a} = e$$

Il est facile de trouver au moyen de e .

$$b = a\sqrt{1-e^2}$$

$$e = 1 - \sqrt{1-e^2} = 1 - \left(1 - \frac{e^2}{2}\right) = \frac{e^2}{2}$$

en négligeant les puissances supérieures à la seconde.

Nous aurons donc bien aisément l'aplatissement, puisque $b = a(1-e)$

Dans ces déterminations, on ne se contente pas de deux observations, mais on les combine quatre afin d'avoir des résultats plus exacts. - on suit dans le calcul la Méthode Des moindres carrés.

Les mesures qui ont servi de base généralement à l'évaluation des courbes exactes sont celles qui résultent de la combinaison de l'arc du Pérou et de l'arc compris entre la France et l'Espagne.

on trouve alors

$$a = 3\ 271\ 985^T = 6\ 377\ 218^m$$

$$b = 3\ 261\ 291 = 6\ 356\ 180$$

$$a-b = 10\ 694 = 21\ 038$$

$$e = \frac{1}{205}$$

on peut chercher la longueur du quart du méridien. En effet, l'arc d'écliptique dont le $\frac{1}{4}$ est a a pour expression

$$a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}$$

en développant la quantité sous le signe \int d'après les puissances croissantes de e , on a trouvé

$$5\ 131\ 276^T$$

le mètre sera donc

$$0^T, 5131276$$

ou

$$443^l, 342$$

Quand on a fixé la longueur légale du mètre, on n'avait plus mesuré encore tout l'arc de l'équateur en Espagne. - la longueur légale est un peu différente

$$0^T, 5131720$$

ou

$$443^l, 296$$

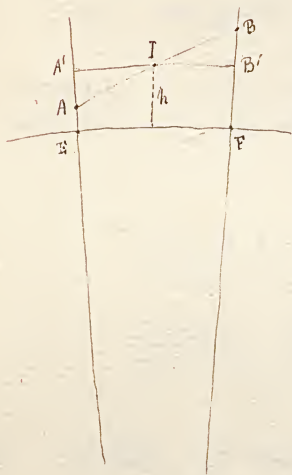
on l'a mesurée, malgré la légère erreur qui s'y trouve.

On a trouvé quelques irrégularités dans la longueur des arcs comparés

sur un même méridien. Mais ce ne sont que des variations locales, qui indiquent que la Terre n'est pas homogène, par suite, que l'attraction vers le centre n'est pas la même en tous les points, et que la surface des mers n'est pas exactement de révolution.

En outre, les Deux Hémisphères ne paraissent pas être parfaitement équilibrés. - la longueur d'Arc de 1°. mesurée au Cap de Bonne-Espérance pour Lacaille a été trouvée de 57027". et la latitude du Cap est de 30°, c.à.d. qu'elle est plus petite que celle de l'Arc mesurée en France. On aurait donc dû trouver l'Arc de 1°. notablement plus petit qu'en France, tandis qu'il est le même.

Observation sur la Réduction d'une longueur mesurée à la Surface de la Terre, à ce qu'elle serait au niveau de la Mer.



Soit AB une ligne mesurée sur laquelle se trouvent deux points A et B . Soit on mesure la distance. Il s'agit de savoir ce que serait cette distance si l'on avait pu, en ligne des points A et B leurs projections E, F sur le niveau de la mer. Pour le point I , milieu de AB , menons $A'B'$, parallèle à EF . L'Arc AB est sensiblement égal à $A'B'$. Par conséquent, tout revient à passer de l'Arc $A'B'$ à l'Arc AB . Or, la hauteur du point I au-dessus du niveau est sensiblement égale à la demi-somme des hauteurs des points A et B . - Si donc on connaissait ces hauteurs, on pourrait calculer précisément, et on arriverait au résultat.

$$EF = AB \cdot \frac{r}{r+h} = AB \left(1 - \frac{h}{r+h}\right)$$

ce qu'on peut écrire

$$EF = AB \left(1 - \frac{h}{r}\right)$$

en négligeant $\frac{h^2}{r(r+h)}$.

Il faut donc avoir à la détermination des hauteurs des Stations A et B au-dessus du niveau de la mer.

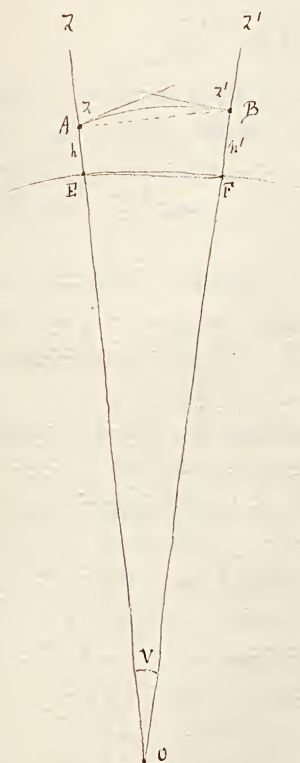
Il y a différents moyens.

D'abord, on peut faire usage des Baromètres.

Mais l'usage des Instruments d'Astronomie peut conduire aussi au même résultat quand on peut établir la Station A au bord de la mer pour une série de Stations Intermédiaires: cela revient à une série de nivellements.

On suppose que les Stations sont peu rapprochées. - Si elles sont un petit nombre, on procède autrement. - après avoir déterminé pour la dernière Station T sa hauteur au-dessus de la mer, en établissant par le niveau de la mer la moyenne entre les niveaux des points marés et des basses mers, on procède à la recherche de la différence des

hauteurs de deux Stations voisines à l'aide de la mesure des hauteurs Zenithales correspondantes. — Nous allons indiquer ce procédé pour les Stations A et B par exemple.



Soient h et h' les hauteurs de ces Stations. — on connaît h . Je fait savoir $h' = h + x$.

En A, on observe la distance Zenithale de B, on détermine la distance Zenithale apparente z . La dist. Zenithale vraie est $z + \delta$. En B on observe la distance Zenithale z' de A : la dist. Zén. vraie est $z' + \delta'$. — Soit v l'angle des deux rayons menés aux points A et B. Cet angle est facile à observer quand on connaît approximativement la distance EF.

Considérons le triangle OAB. Ses angles sont

$$v \quad \pi - z - \delta \quad \pi - z' - \delta'$$

Ses côtés sont

$$r + h \quad r + h' \quad AB$$

Écrivons que la somme des deux premiers côtés est à leur différence comme la tangente de la demi-somme des angles opposés est à la tangente de leur demi-différence. Nous aurons

$$\frac{2r + h + h'}{h' - h} = \frac{\cot \frac{\pi - v}{2}}{\cot \frac{z' - z + \delta' - \delta}{2}} = \frac{\cot \frac{v}{2}}{\cot \frac{z' - z}{2}}$$

en supposant $\delta' = \delta$, ce qui n'introduit pas une grande erreur. Donc

$$\frac{2r + 2h + x}{x} = \frac{\cot \frac{v}{2}}{\cot \frac{z' - z}{2}}$$

on voit ainsi se déterminer δ et δ' , ce qui serait difficile, et demanderait des observations exactes. — on ne peut guère compter sur les nombres qui se trouvent dans les tables, parce que les circonstances atmosphériques peuvent les différer.

En même temps que cette application est nécessaire dans le tracé d'une ligne géodésique, elle fait connaître un élément essentiel de la figure de la Terre. Car la Longitude, la Latitude et l'altitude d'un point sont en quelque sorte ses trois coordonnées sur la surface de la Terre.

On voit ainsi aussi qu'en France, l'écart de l'Océan diffère peu de celui de la Méditerranée. C'est une conséquence de la convexité de la Terre que nous avons supposée à la surface des mers.

La méthode précédente suppose qu'on puisse se placer aux deux Stations. Quant aux points inaccessibles, il est facile aussi d'en connaître l'altitude.

Soient A et B. deux points accessibles,

C le sommet d'une montagne,

a b c leurs projections sur la surface des mers.

on connaît ab. et comme les angles A et B sont les mêmes à l'horizon.

donc, les angles a et b sont aussi connus. — on pourra donc, dans le triangle abc, calculer les côtés ac, bc.



Dans le point A, menons une parallèle AD à ac
 nous aurons un triangle rectangle en D dont nous
 connaissons le côté AD = ac approximativement; et
 si on veut l'avoir exactement, il suffira de poser

$$AD = ac \cdot \frac{r+h}{r}$$

Alors part, on a observé en A la distance zénithale
 du point C, c.à.d. l'angle ZAC. Son complément
 est CAD. on connaît donc deux éléments du triangle rectangle ACD.
 on en conclura donc CD, c.à.d. la hauteur du point C inaccessible au des-
 sous du point A accessible.

Il est vrai qu'il en résulte d'une distance zénithale, et l'observa-
 tion ne donne pas la véritable. - En outre, comme le point C est inac-
 cessible, il est impossible de faire usage de la méthode des distances zénithales
 réciproques, et l'on est forcé de recourir aux tables.

C'est ainsi qu'on a déterminé l'élévation des hautes montagnes.
 la plus élevée est dans l'Asie centrale. Mais elle n'a pas été mesu-
 rée avec assez d'exactitude pour qu'on ait dans les résultats une entière
 confiance.

Un Sommet de la partie septentrionale du Tibet a	8818 ^m	?
au Sud est le Dhaulagiri	8536 ^m	?
Le plus haut Sommet des Cordillères (Parata, Pérou) a	7693 ^m	
Chimborazo	6814	
Mont. Blanc	4810	
Mont Rose, 20 lieues E. du Mt Blanc, frontière du Piémont	4619	
Mont Pelvoux (H ^{te} alpes)	4100	
Etna	3306	
Mont Rigi (Suisse)	1798	

Une dernière montagne est au-dessous de la limite des neiges perpétuelles. car
 cette limite, variable avec la latitude, est, pour Lat. 45°, de 2500^m. - Dans
 l'équateur, elle est de 4000^m.

le plus h ^t . Sommet du Jura a	1703 ^m
Norges "	1460

on voit d'après ces nombres que la plus haute altitude n'atteint
 pas 9000^m et est peu supérieure à 8000. Moins 8000. Le rayon de
 la terre est approximativement de 6400 Kilom. le rapport $\frac{h}{r}$ est
 donc $\frac{1}{400}$.

ainsi les plus grandes hauteurs sont une fraction extrêmement
 petite du rayon de la terre, et, dans les questions de Mécanique céleste
 où nous arrivons à Calculer l'attraction exercée par la terre sur un
 autre astre, la terre pour exemple, nous pouvons la supposer de révolution
 et même sphérique dans beaucoup de cas.

Pour simplifier et étudier de la surface de la terre, il faut indiquer
 comment on peut fixer la position de chaque point de la surface. - Pour

avons déjà parlé. Des trois coordonnées dont on fait usage, altitude, Longitude, et latitude. — Nous avons déjà vu comment on obtient l'altitude et la latitude. Il nous reste à décrire les moyens que l'on emploie pour avoir la 3^e. coordonnée.

Nous appelons simplement *qu'on obtient la latitude* d'un lieu en prenant le complément de la distance zénithale du pôle, et que les marins prennent la hauteur du Soleil ou d'une étoile à son passage au méridien, et sa distance polaire pour la conversion des temps.

Détermination Des Longitudes.

Le moyen le plus précis pour déterminer la différence de Longitude de deux observations consiste dans l'emploi des Chronomètres. — Après chaque observation, il y a une horloge sidérale dont la marche est réglée sur la révolution annuelle des étoiles. Une seconde horloge marque 24^h dans l'intervalle de deux passages successifs d'une étoile au méridien, on bien elle leur porte d'une quantité constante que l'on connaît.

on a l'altitude de l'étoile les horloges sidérales sur le passage du point équinoxial.

Ainsi pour :

Transport des Chronomètres.

$$h' - h : 24 :: l : 360$$

$$l = 15^\circ (h' - h)$$

on emploie plusieurs chronomètres pour plus d'exactitude.
60 chronom. entre Londres et St. Petersburg.

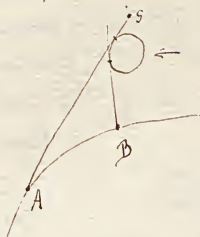
Seconde Méthode, au moyen des fous.

Elle n'est applicable que pour des lieux peu éloignés l'un de l'autre. Méthode connue.

3^e. Méthode, plus exacte.

Satellites de Jupiter.

occultations des étoiles par la Lune. — Correction.



(voir De l'observation).

Cartes Géographiques.

Plusieurs Systèmes.

- 1°. Projection orthographique.
- 2°. Perspective ou Projection Stéréographique.
- 3°. Développement Conique ou Cyllindrique.
- 4°. Moyens particuliers appropriés à certains usages, pour exemple, Développement de Blavertus, Cartes de Mercator.

Pour représenter tout le globe, on n'emploie que les deux premières méthodes.

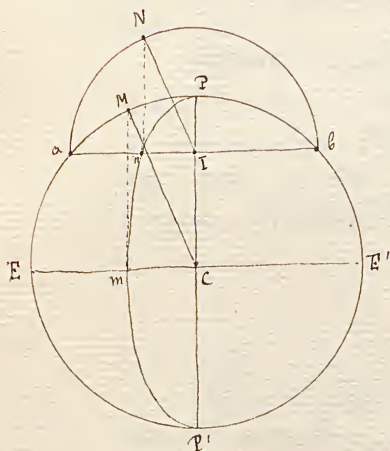
Elles étaient toutes deux connues des Grecs. Ptolémée les a décrites dans deux ouvrages qui nous sont parvenus. — Il appelle la première analemmatique, et la seconde Planisphère. — Les auteurs du moyen âge ont appelé cette dernière astrolabe.

Leurs défauts sont inverses. — or la proj. Orthographique et la proj. Stéréogr. quand le pt. de vue est à l' ∞ . C'est ce qui a conduit Lahire à penser qu'il existait sur PO prolongé un point pour lequel les deux défauts seraient compensés.

Projection Orthographique.

on peut aisément se rendre compte par la Projection. Alors les cercles et les parallèles y sont représentés par des lignes droites, et les méridiens par des Ellipses ayant pour axe commun le ligne des Pôles.

Le demi-axe de chacune de ces Ellipses est égal au Cosinus de la longitude du méridien projeté comptée à partir du pôle de projection.



Le cercle $EE'PP'$ peut être considéré comme le rabattement du cercle équateur autour de EE' , son rayon CM comme le rabattement de la trace d'un méridien sur l'équateur. Si donc on abaisse Mm perp. sur EE' , m sera la projection du point M intersection de l'équateur et du méridien. Donc mC est le petit axe de l'ellipse. or

$$mc = \cos ECM = \cos \text{Longitude}$$

On peut facilement construire l'ellipse par points. on mène un parallèle ab qy. on décrit deux arcs de cercle. on mène IN parallèle à CM , et l'on projette N en n . le point n est un point de l'ellipse.

On ne fait pas la projection sur l'équateur, parce que les Méridiens tropicaux seraient trop déformés, et ce sont celles qu'il importe de représenter exactement.

Projection Stéréographique.

Il y en a de trois sortes :

- Projection Polaire, si l'on est au pôle ;
- Projection sur le Méridien, " sur l'équateur ;
- Projection sur le Méridien, " au Méridien.

Les propriétés générales.

- 1°. Tout arc se projette suivant un cercle.
 - 2°. Les projections de deux cercles se coupent sous un angle égal à celui des deux cercles.
 - 3°. Le centre de la projection d'un cercle est la projection du sommet du cône circonscrit à la sphère suivant ce cercle.
- Ces propriétés sont communes.

1°. Projection sur le Méridien.

Soit $EE'PP'$ le plan du méridien sur lequel se fait la projection.

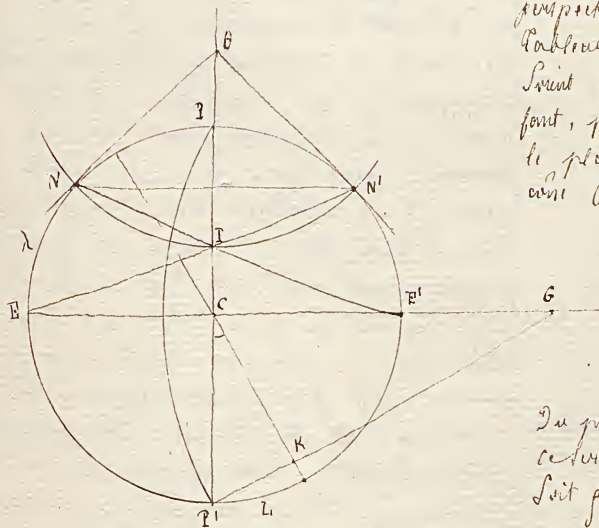
Soient N et N' les extrémités d'un parallèle. Je fais, pour avoir le centre du cercle projeté sur le plan du Tableau, inscrire à NN' un arc (1^{re} propriété). Son sommet est θ , situé dans le plan du Tableau ; je joins au point de vue ; et j'écris le point d'intersection de cette droite avec le plan du Tableau : ce qui donne encore θ . — Si donc

du point θ comme centre je décris un cercle, ce sera la projection cherchée.

Soit p son rayon, et $r = 1 = cR$:

$$p = \cotg. \lambda.$$

Je dis que si l'on veut déterminer directement les points où le cercle qui forme la perspective du parallèle NN' rencontre EP' , il faut mener $E'N$ et EN' . En effet, le rayon qui va de l'œil au point du parallèle compris dans le méridien proj. à $EE'PP'$ est dans ce plan méridien. Si on le rabat sur le plan de l'équateur, l'œil vient en E' , le point du parallèle en N , et le point I n'a pas changé de position.



De la cette Regel qu'on peut substituer à la construction précédente. Soient le point E' une extrémité N . Du point E' , déterminer les différents points F , puis passer des cercles par les groupes de points $NE N'$.

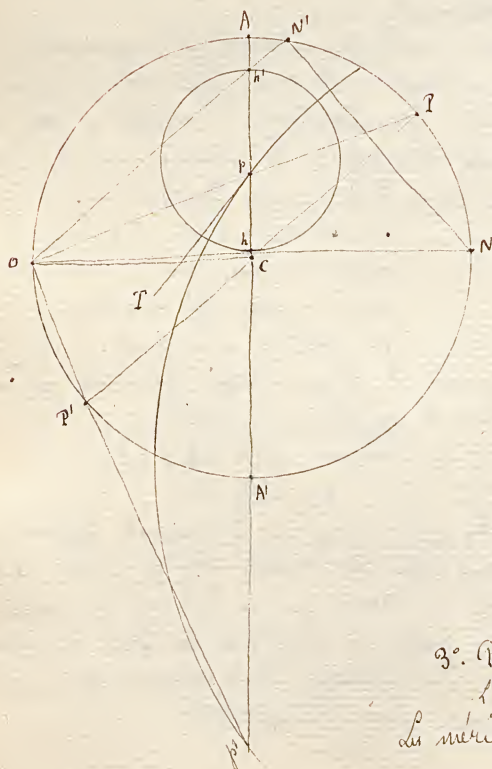
Le méridien qui est perp. au plan de projection se projette suivant PP' on l'appelle le méridien moyen. — Soit L la longitude d'un second méridien comptée à partir du méridien moyen. — Pour déterminer le centre du cercle qui sera la projection de ce méridien, il faut toujours imaginer le cylindre, l'écraser, et par elle même une parallèle aux génératrices de ce cylindre. or cette parallèle est tirée dans le plan de l'équateur perp. à la trace du méridien sur ce plan de l'équateur. Si donc on abaisse une perp. sur cette trace supposée habitée, on aura en G le centre.

$$p = P'G = \frac{r}{\sin L} = \frac{1}{\sin L}.$$

2°. Projection sur l'Horizon.

On appelle Point Central dans une carte construite stéréographiquement la projection de l'extrémité du diamètre qui passe par elle. — Les points qui sur la terre, sont situés à la même distance de cette extrémité, se trouvent aussi en projection à égale distance du point central. — Quand on veut que le point central soit un point donné de la terre, on prend pour point de vue le point diamétralement opposé, et la projection se fait alors sur un plan perp. à la verticale du lieu. — Le plan est ce qu'on appelle l'Horizon rationnel de lieu. Voilà pourquoi l'on dit que la projection est faite sur l'Horizon.

Soit C le cercle perpendiculaire au diamètre qui passe par le point de vue, AA' l'intersection de ce cercle avec le méridien du point central (par



peu près O le rabattement du point de vue. p et p' sont les projections des pôles. Le premier p seulement est représenté sur la carte, puisqu'elle ne comprend qu'une Hémisphère. — Tous les méridiens en projection seront des cercles qui passeront par p et p' . — Soit L la longitude d'un méridien par rapport au méridien de Paris AA' . L'angle que fera sa projection avec AA' est égal à L . Si donc nous faisons en p un angle $= L$ par la droite pT , la projection cherchée sera un cercle passant par p et p' et tangent à pT .

Quant à la Représentation des parallèles elle est aussi facile. Soit NN' le rabattement d'une parallèle sur le plan du méridien. Soient ON, ON' , et décrivons sur AA' un arc, nous aurons la représentation d'un arc de parallèle NN' .

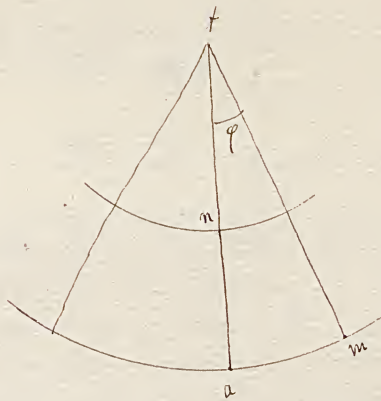
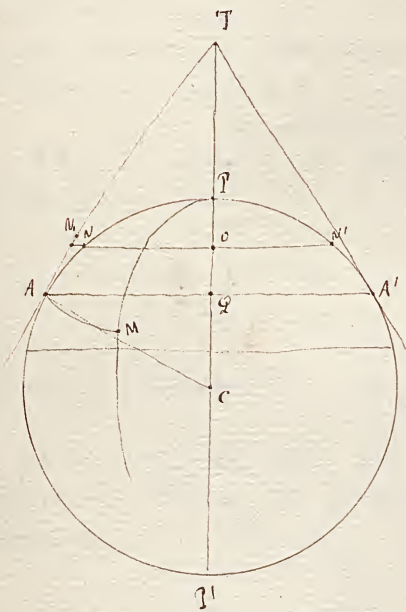
3°. Projection Plaine.

Soit et placé au pôle, le Tableau est l'équateur. Les méridiens sont représentés par les Rayons de l'équateur.

les parallèles pour des cercles concentriques. — on fait peu d'usage de cette projection, parce que les lieux voisins du pôle, les seuls qui ne seraient pas fort altérés sur la carte, sont aussi ceux qu'il n'y a guère lieu de représenter, parce qu'ils sont inhabités ou inconnus.

Développement Conique.

Il s'applique à la Représentation d'un Royaume, d'une province comprise entre deux parallèles et deux méridiens donnés. on imagine un cône fictif. on est sur le parallèle moyen, et l'on suppose que ce cône se confond sensiblement avec la surface de la terre dans l'étendue de la terre comprise entre les deux parallèles: — on développe ce cône sur un plan en un secteur circulaire. Les méridiens deviennent des rayons du secteur, et les parallèles, des arcs de cercles concentriques.



Le parallèle moyen se développera suivant l'arc am , dont le rayon $ta = \cot. \Lambda$, Λ étant la latitude

de ce parallèle.

Un autre parallèle NN' à la latitude λ sera dans le développement un arc de cercle dont le rayon aura pour valeur

$$tn = TN_1 = \frac{TO}{\cos \Lambda} = \frac{CT - OC}{\cos \Lambda} = \frac{\cot \Lambda - \sin \lambda}{\cos \Lambda}$$

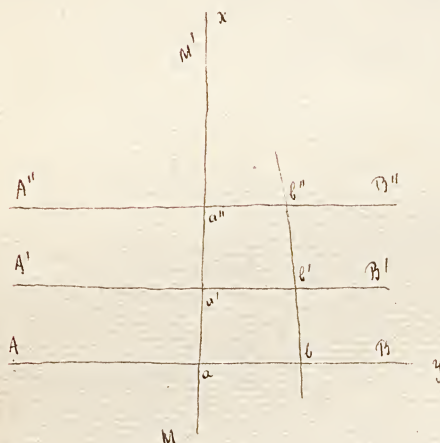
Le méridien perp. au plan sur lequel on fait le développement s'appelle le Méridien moyen. ta représente ce méridien dans le développement. C'est-à-dire l'angle φ que le rayon tn représentant un autre méridien dont la longitude est L , fera avec le méridien moyen ta . — on a

arc $am = \varphi. ta$. Sur la sphère arc $AM = L$. $AQ = L \cos \Lambda$. or arc $AM = \sin$.
Donc $\varphi. ta = L \cos \Lambda$, $\varphi \cot. \Lambda = L \cos \Lambda$. $\varphi = L \sin \Lambda$. — Cette

valeurs de φ , et l'expression du Rayon ter, sont les éléments qui servent à construire la Carte.

Développement de Flamsteed.

Dans ce système, c'est la surface du cylindre \pm circonscrit à la terre suivant un méridien moyen que l'on considère comme se confondant avec une portion de la surface de la terre et que l'on développe sur un plan. — Le méridien moyen devient une ligne droite, et les parallèles, des Arcs perpendiculaires aux perpendiculaires égales à ces arcs. Les méridiens voisins de part et d'autre du méridien moyen deviennent des lignes courbes qui sont le développement des ellipses suivant lesquelles les plans des méridiens coupent le cylindre.



Soit MM' le méridien moyen développé, $AB, A'B', A''B''$ les parallèles; $aa', a'a'', \dots$ sont égales à l'arc de méridien compris entre les parallèles correspondants, c.à.d. à la différence de Longitude des deux parallèles.

Soit Λ la latitude de AB .

$\Lambda', \Lambda'', \Lambda''' \dots$ celles de $A'B', A''B'', A'''B''', \dots$

$$aa' = \lambda - \Lambda$$

$$a'a'' = \lambda' - \Lambda$$

etc.

Observez les courbes qui représentent les méridiens.

Soit $bb'b''$ une de ces courbes, L la longitude du méridien qui elle représente, comptée à partir du méridien moyen. — $ab, a'b', a''b''$ sont les ordonnées.

$$ab = L \cos L$$

$$a'b' = L \cos \lambda$$

$$a''b'' = L \cos \lambda'$$

etc.

Telles sont les équations qui déterminent la position d'un point dont la longitude et la latitude sont connues.

Observez l'équation de ce méridien. Prenons AB et MM' pour

$$x = aa', \quad a'b' = y$$

$$x = \lambda - \Lambda, \quad y = L \cos \lambda$$

éliminant λ

$$y = L \cos (x + \Lambda)$$

cette est l'équation cherchée.

au point où $bb'b''$ rencontre le méridien moyen MM' , on a $y = 0$,

par suite $\cos(x+\Lambda) = 0$ et $x = 90^\circ - \Lambda$. — Tous les méridiens de la carte convergent en ce point, qui représente le pôle.

Si l'on suppose que le premier parallèle AB soit l'équateur, $\Lambda = 0$, et l'équation devient

$$y = R \cos x.$$

C'est ce qu'on appelle.

Dans le développement de Blumenthal, les aires ne sont pas altérées.

En effet, considérons un petit rectangle sphérique $B'C'B''C''$ compris entre deux parallèles inf. voisins voisins et deux méridiens aussi infiniment voisins.

Sur une carte

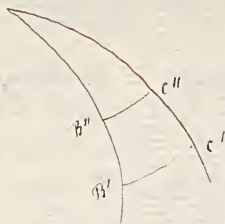
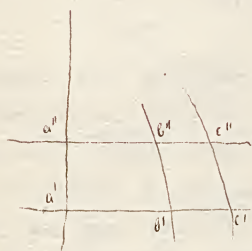
$$B'C' \times B'B''.$$

à ce petit rectangle corres.

pond $B''C''B'C'$, dont

l'aire est $B'C' \times a'a''$. — or $B'C' = b'c'$, $B''C'' = b''c''$, donc ...

cy f. d.



Système de la Nouvelle Carte de France. Développement de Blumenthal modifié.

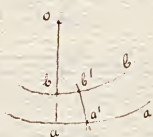
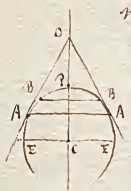
Si le développement de Blumenthal a l'avantage de ne pas altérer les distances dans le sens des parallèles, et de conserver la grandeur des aires, il a le défaut d'altérer la configuration des parties qui s'éloignent du parallèle moyen, parce que les méridiens y deviennent obliques aux parallèles. Mais on leur a été perpendiculaires comme sur la sphère.

Pour éviter cet inconvénient, on a eu l'idée de figurer les parallèles non plus par des droites, mais par des cercles concentriques. — Le cercle correspondant au parallèle moyen se détermine comme dans le développement conique, et les autres, par la condition que leurs distances respectives soient les mêmes que sur la sphère. — Le méridien moyen est représenté par une ligne droite, et d'autres par une courbe construite de façon que les arcs interceptés sur les parallèles entre deux méridiens restent de même longueur sur la carte.

Après cela, soit AA le parallèle moyen. on mènera sur la carte un cercle aa de rayon $oa = OA = R \cos \Lambda$. — la droite oa représente le méridien moyen EAP.

Le parallèle BB à la latitude λ sera représenté par un cercle bb ayant le point o pour centre, et un rayon $r = ob = oa - AB$; ou

$$(1) \quad r = R \cos \Lambda - (\lambda - \Lambda) = R - (\lambda - \Lambda).$$



Pour construire un méridien, on prendra 2 sur les cercles aa' , bb' , les long. aa' , bb' , égales respectivement aux arcs compris sur les parallèles entre le méridien moyen, et celui qu'on veut représenter. — Soit l la longueur de celui-ci par rapport au méridien moyen. Soit le parallèle BB' compris entre ces deux méridiens sera égal à $l \cos \lambda$. Donc

$$(2) \text{ arc } bb' = l \cos \lambda.$$

Enfin, un point b' de la carte sera déterminé par le rayon r du cercle sur lequel il se trouve, et par la longueur de l'arc bb' compris sur le cercle à partir de la droite aa' . — Les expressions de ces deux coordonnées sont fournies par les deux équations (1) et (2).

Coordonnées Rectangles. — Construction des parallèles pour points. —

Dans certains de la carte de France, les cercles qui représentent les parallèles ont de très grands rayons: leur centre est au pôle de la carte, et il serait toujours difficile, souvent même impossible, de tracer ces cercles d'un mouvement continu avec le compas. — on les décrit donc pour points. — Dans cela, on les rapporte à deux axes rectangulaires dont l'un est le méridien moyen, et l'autre la tangente au pôle de la carte.

Quand on a un point m on a

$$r = R - (\lambda - \Lambda)$$

$$\text{arc } mb = l \cos \lambda$$

appelons φ l'angle au centre B compris par bm .

$$\varphi = \frac{\text{arc } bm}{r}$$

$$\varphi = \frac{l \cos \lambda}{r}$$

$$mr = r \sin \varphi \quad or = r \cos \varphi$$

D'où

$$x = R - r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi.$$

Telles sont les coordonnées Rectangles d'un point m de la carte. x et y entrent dépendent directement de la latitude λ et de la longitude φ du point correspondant sur la sphère.

Les valeurs de x et de y exprimées directement en fonctions de λ et φ sont

$$x = R - (R + \Lambda - \lambda) \cos \frac{l \cos \lambda}{R + \Lambda - \lambda}$$

$$y = (R + \Lambda - \lambda) \sin \frac{l \cos \lambda}{R + \Lambda - \lambda}$$

Si l'on veut l'éq. d'un parallèle, on éliminera l , et l'on aura

$$\left(\frac{x - R}{R + \Lambda - \lambda} \right)^2 + \left(\frac{y}{R + \Lambda - \lambda} \right)^2 = 1$$

équation d'un cercle. —

Pour obtenir l'équation d'un méridien, il faudrait éliminer λ entre les expressions de x et de y .

Les méridiens coupent l'axe oz en un même point qui correspond au pôle, et pour lequel on a pour cosinus $\lambda = 90^\circ$. La distance de ce point au centre O des cercles est égale à

$$R + \Lambda, - 90^\circ.$$

Calcul de l'inclinaison d'un méridien sur une parallèle.

Les courbes qui représentent les méridiens ne coupent pas précisément à angle droit les parallèles, comme cela arrive sur la sphère: mais elles s'écartent peu de la perpendicularité, en sorte que la projection de sphère représente sur la carte un très-petit déformement. C'est là ce qui se voit quand on s'est permis en modifiant le développement de Flamsteed.

Considérons en effet l'angle qu'un méridien en m' fait au point m avec la normale ou parallèle qui passe par ce point.

Le point m' étant infiniment voisin de m , on a, dans le triangle $mm'n$, rectangle en n

$$\text{tg. } m'mn = \frac{nm'}{nm}$$

$$\text{Soit } on = r, \text{ noa} = \varphi : \text{alors } nm' = r d\varphi \quad nm = dr$$

$$\text{tg } \mu = \frac{r d\varphi}{dr}$$

Les équations précédentes qui donnent r et φ , et dans lesquelles λ faut regarder comme constant, donnent

$$dr = d\lambda$$

$$r d\varphi + \varphi dr = -l \sin \lambda d\lambda$$

Donc

$$\frac{r d\varphi}{dr} = l \sin \lambda - \varphi$$

$$\text{tg } \mu = l \sin \lambda - \varphi = l \sin \lambda - \frac{l \cos \lambda}{r}$$

Cette expression donne pour μ une valeur très-petite, surtout pour la carte de Brasse, où λ est compris entre 0 et 90° , et $\Lambda = 45^\circ$.

Pour exemple, pour $\lambda = 90^\circ$, on trouve $\mu = 20'$

aux points situés sur la parallèle moyenne, où on a $r = \cot \lambda$; D'où $\text{tg } \mu = 0$. De sorte que les méridiens sont rigoureusement perp. au parallèle moyen. Et par conséquent dans tous les cas ils s'écartent peu de la perpendicularité, il en résulte que les figures ne sont pas sensiblement déformées.

Égalité des Surfaces.

ainsi que dans le système de Flamsteed, les aires obtiennent les mêmes déformations et déviations.

ainsi ce développement joint des mêmes propriétés que celui de Flamsteed, et en outre il a l'avantage de ne déformer que très-peu les figures. Il devient précisément le système de Flamsteed quand le parallèle moyen est l'équateur, car alors le centre commun des parallèles projetés est à l'infini.

application au cas où la Terre est supposée un Sphéroïde.

Pour plus d'exactitude, on tient compte dans la carte de l'aplatissement de la Terre. — Le mode de développement n'y prête sans difficulté. Il suffit de ne plus considérer le méridien moyen comme un cercle dont les arcs sont proportionnels aux latitudes, mais bien comme une ellipse dont les arcs sont fonctions des latitudes. — on se sert alors, pour déterminer les distances des parallèles comptés sur le méridien, de la formule

$$S = a(1 - \frac{e^2}{2})(\lambda' - \lambda) - \frac{e^2}{2} a^2 \sin(\lambda' - \lambda) \cos(\lambda' + \lambda)$$

Le Rayon du parallèle moyen que nous avons pris égal à $\cos. \lambda$ en supposant le Rayon de la Sphère = 1, subit aussi une légère modification. Il devient

$$OA = N \cos. \lambda$$

N est la longueur de la Normale.

Cartes marines.

Développement de Mercator.

Dans ce système, les méridiens sont représentés par des droites parallèles dont les distances respectives sont les mêmes que celles des méridiens comptés sur l'équateur. — L'équateur et les parallèles sont aussi représentés par des droites, perp. sur les précédents. Les distances de ces droites à l'équateur ne sont pas proportionnelles aux latitudes des parallèles qu'elles représentent: elles croissent très rapidement suivant une loi compliquée.

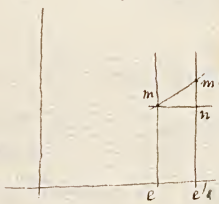
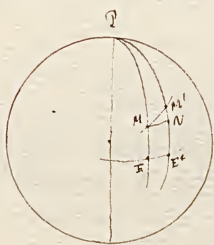
Cette loi a pour objet de remplir cette condition:

Deux lignes quelconques tracées sur la carte doivent se couper sous le même angle que les deux courbes sphériques qu'elles représentent.

C'est, comme on le voit, une des propriétés de la projection géométrique, mais qui n'est que secondaire, et en quelque sorte fortuite dans ce genre de projection, tandis qu'elle forme le caractère principal de la carte, et est le fondement de l'usage qu'en font les marins.

Deux courbes forment le même angle sur la sphère et sur la carte si nous exprimons qu'une courbe quelconque fait avec les méridiens qu'elle traverse les mêmes angles sur la sphère et sur la carte.

Soit donc une courbe quelconque tracée sur la sphère, et menons la



courbe qui la représente sur la carte. MM' et mm' sont deux éléments infiniment petits de ces courbes. Le premier est compris entre deux méridiens EM, E'M' qui font entre eux un angle $d\lambda$ (c'est la longitude de EM.), et le second est compris entre les deux droites parallèles

en, c'est qui représentent les méridiens. — La distance de ces arcs est proportionnelle à l'angle $d\lambda$ ainsi

$$e' = a \cdot d\lambda$$

Il suffit d'exprimer que les triangles $MM'N$ et $mm'n$ sont semblables;

$$\frac{e}{M} = \frac{e'}{m}$$

$$\frac{d\lambda}{d\lambda \cdot \cos \lambda} = \frac{ds}{a \cdot d\lambda}$$

$$ds = a \cos \lambda \cdot d\lambda$$

Jusqu'ici, nous pouvons considérer les quantités $d\lambda$, ds et $d\lambda$ comme étant simplement des petits, sans être mathématiquement inférieurs. Or, ce calcul nous apprend que, tandis que l'incrément de longitude est le même sur la carte que sur la sphère, l'incrément de longitude est petit d'une latitude est proportionnel à la sécante de cette latitude.

on peut intégrer (voir le livre de Page, p.

Mercator (1569).

Loxodromie: $\rho\theta\sigma$ oblique, $\sigma\rho\mu\sigma$ courbe.

Rhumb. Deux arcs de Papes, rotula, petite roue, parce que les Rhumbs de vent, ou directions du vent sont marqués au nombre de 32 sur le Anvers d'un cercle qui représente l'horizon. — on le trouve aussi de Papes, finies de mesure, qui la fait aller droit, comme le Rhumb de vent montre aussi la route qu'il faut tenir.

Notie historique sur les Cartes marines.

avant que l'on eût les Cartes de Mercator, les marins se servaient des Cartes Plantes, dans lesquelles les méridiens et les parallèles étaient représentés par des lignes droites rectangulaires: les méridiens y mesuraient leurs distances Nelles, ainsi que les parallèles. C'est comme si l'on avait étendu la surface de la sphère sur un plan, en conservant à l'équateur et aux méridiens leurs longueurs, mais en allongeant celle des parallèles. On se servait de ces cartes pour déterminer le Rhumb de vent qu'il fallait suivre. on commettait une erreur. Mais on la rendait possible, en ne parcourant qu'une faible distance, et en s'en servant le Rhumb. L'expérience du Rhumb avait pu apprendre à tenir compte approximativement de l'erreur.

C'est le célèbre Géographe des Pays-Bas, Gerard Mercator (1512-1594) qui le premier imagina de faire passer sur les cartes le Degré de Latitude. Il publia en 1569 sa première carte hydrographique construite dans ce système, mais sans en faire connaître le principe.

Plus de 30 ans après, ces principes furent développés par le Géomètre Edward Wright (1560-1620), qui les donna dans un livre intitulé

Determination et Correction de certaines erreurs qui se commettent dans la navigation,

en anglais - 1599. -

Wright montra bien que, pour qu'une Loxodromie devienne une

ligne droite sur une carte plate, il faut, puisqu'on y augmente comme nous l'avons dit, les degrés des parallèles, augmenter dans le même rapport les degrés du méridien. Or, à la latitude λ , l'arc de Parallèle compris entre les deux méridiens qui font l'angle L est égal à $L \cos \lambda$, ou $\frac{L}{\sec \lambda}$. Sur la carte, on fait cet arc égal à L . On augmente donc dans le rapport de 1 à $\sec \lambda$. C'est donc dans ce rapport qu'il faut accroître les degrés du méridien, c.à.d. les distances des parallèles. Si donc on marque sur le méridien, à partir d'un point dont la latitude est λ , des segments égaux $NN', N'N'', \dots$ dont l'accroissement de latitude soit D , il leur correspondra sur la carte des segments proportionnels à $\sec \lambda$, $\sec(\lambda + D)$, $\sec(\lambda + 2D)$... et un arc de méridien sera représenté sur la carte par la somme de ces segments. - Le procédé de construction est d'autant plus exact que l'accroissement D est plus petit. Wright prit $D = 10'$, ce qui présentait une exactitude suffisante.

On en était là quand un navigateur anglais, Henry Bound, vivait en 1650, que la somme des segments d'arcs croissant d'une petite quantité constante depuis l'équateur jusqu'à une certaine latitude, suivait la même loi que le \sec . De la Tangente du demi-arc de la latitude. - Ce fut par des vérifications numériques que Bound fit cette découverte curieuse dont il ne pouvait donner la démonstration.

Mais cette démonstration fut donnée par Gregori dans ses Exercitationes Mathematicae (1668) et par Barrow dans ses Lectiones Geometricae.

Le Géomètre Mercator l'avait annoncée le 1^{er} en 1650 en la proposant comme une sorte de défi aux Géomètres. Mais il ne l'a pas publiée. - on croit de plus que, puisqu'il était en possession de sa célèbre série pour la construction des logarithmes, il ait trouvé aisément cette démonstration.

Depuis l'invention du Calcul Différentiel, dont les Différentiels à disparu, puisqu'il suffit d'écrire l'expression

$$\frac{d\lambda}{\cos \lambda}$$

Carte D. Cassini.

Cassini de Thury qui vivait en 1784 l'idée de la Grande carte de France, se sentait pressé de déterminer la position de chaque point à la surface de la Terre, de deux coordonnées autres que la longitude et la latitude. - après avoir fait choix d'un méridien principal sur lequel on prend un point pour origine, on détermine chaque point de la Terre par l'arc de grand cercle abaisé de ce point perpendiculairement sur le méridien, et par l'arc compris entre le pied de ce point et le point origine. Les premières de ces coordonnées s'appellent la Perpendiculaire ou la distance à la méridienne, et la seconde

la seconde, la distance à la perpendiculaire.

Dans ce système, les points qui ont la même distance à la perp. sont sur un grand cercle perp. à la méridienne, et tous ceux qui ont même distance à la méridienne sont sur un petit cercle parallèle au méridien principal.

Pour former la carte, on peut supposer qu'un cylindre ait été circonscrit à la Terre suivant le méridien principal, et qu'il se confond avec la surface de la Terre de part et d'autre de ce méridien suivant une assez grande étendue, pour que les petits cercles perp. au méridien principal puissent être considérés comme étant situés sur le cylindre lui-même. — Pour les grands cercles perp. au méridien, ils se confondent avec les arcs du cylindre. — on développe ce cylindre sur un plan. Les grands cercles dont il s'agit et les petits cercles parallèles au méridien principal forment dans le développement deux séries de droites rectangulaires. — Les courbures sphériques qui devraient des lignes droites conservent leur propre grandeur sur la carte.

Notice historique
sur la
Mesure De la Terre.

La figure De la Terre donne lieu à Deux questions distinctes, savoir, De déterminer la forme, et De déterminer sa grandeur.

Dès la plus haute antiquité, on s'est occupé De la seconde question; mais on n'a été satisfait que vers la fin Du 17^e siècle par Huyghens et Newton. Jusque-là, on avait regardé la Terre comme sphérique, et c'étaient ces Deux grands Géomètres qui eurent les premiers mis De l'astronomie en pensant que notre globe Devait être un ellipsoïde De très petite.

Voici l'indication succincte Des documents anciens qui nous ont servi sur la grandeur De la Terre, et les moyens employés pour la déterminer.

Aristote dit, Dans son *Traité Du Ciel*, L. II, que ceux qui s'occupent De conjecturer la grandeur De la Terre, ne lui donnent guères que 20000 stades De circonférence. — On ne conçoit pas la faiblesse De l'estime. — Ce passage prouve D'une manière évidente qu'à l'époque D'Aristote, on avait déjà mesuré plus ou moins bien la grandeur De la Terre.

276 ans av. J. C. Eratosthène a mesuré un arc De méridien. Son procédé fut comme suit. Il suppose sur la détermination De la différence Des latitudes De Deux points Du méridien, pour observation De la hauteur Du O au dessus De l'horizon, en ces lieux, en un même jour.

Eratosthène savait qu'à Syène, au solstice, au jour De l'annuel, le jour Du solstice, à midi, le puits était éclairé jusqu'au fond, et qu'un style vertical ne produisait que l'ombre. — Cela indiquait que le soleil était en ce moment au zénith De Syène. — Mais, au même moment, à alexandrie, Eratosthène voyait le O à une distance zenithale De 70 12'. Il en conclut, en supposant le O infiniment éloigné, que l'arc AB est 70 12', ou

$$\frac{360^\circ}{70^\circ 12'}$$

et la distance De Syène à alexandrie était estimée 5000 stades. Eratosthène suppose que ces 5000 stades étaient compris sous la direction même Du méridien, quoi qu'il y ait pu y avoir 30 De longitude entre les Deux lieux, et il en conclut que le degré était De 69 1/2 stades ou 700 stades, et la circonf. De la Terre 25200 stades. — C'est la même que beaucoup D'auteurs anciens et Du moyen-âge ont adoptée depuis Eratosthène.

106 ans av. J. C. l'astronome Ptolemée, le montre De l'époque, suivit une autre méthode pour déterminer la diff. Des latitudes De Deux lieux supposés sous le même méridien. C'est par observation Des hauteurs D'une même étoile. Les Deux lieux étaient Rhodes et alexandrie, leur distance était estimée 5000 stades, comme

cette D. Pythé à alexandrie. - Canopus, belle étoile du ciel austral, ne paraît à Pythé qu'à l'horizon, sans s'élever au-dessus. à alexandrie, elle s'élève de $7^{\circ} 30'$ au-dessus de l'horizon, à son passage au méridien. - Ptolémée en conclut que l'arc AB qui sépare Rhodus d'alexandrie doit lui-même de $7^{\circ} 30'$ ou $\frac{360}{48}$, et l'équation

$$\frac{360}{48} = \text{soixante Stades}$$

Il tira

$$1^{\circ} = 666 \text{ Stades.}$$

ainsi son degré était plus court que celui d'Cratosthènes, si toutefois son stade avait la même longueur, ce que nous ignorons.

12^e ans av. J. C. - Ptolémée dit qu'il n'eut pas besoin de mesurer l'arc AB dans le même méridien, mais qu'il suffit de savoir de quel angle il est incliné au méridien, et de connaître la latitude de ses deux extrémités. - Il dit avoir fait cette opération, mais sans en donner le détail. - Il dit seulement que, suivant les meilleures mesures, le degré est de soixante Stades.

Vérifier ce qui nous reste sur la mesure de la Terre chez les Grecs. Les arabes s'en sont aussi occupés.

au IX^e. siècle, le calife Almansour, qui encourageait les sciences avec beaucoup d'ardeur, fit mesurer un arc de Méridien dans les plaines de Singiar. - Les mathématiciens marchèrent les uns vers le S. les autres vers le N. en mesurant la distance parcourue, et en calculant la différence de latitude par la hauteur du Soleil. - Ils trouvèrent le même résultat que Ptolémée. - C'est principalement à trois frères, Mohammed, Ahmed, Hassen, fils de Musa ben Shaker, qu'on attribue cette mesure du degré terrestre. Leur unité de mesure ne nous est pas connue, en sorte que nous ne pouvons pas juger du degré de précision qu'ils obtinrent.

(Les trois mathématiciens ne doivent pas être confondus avec Mohammed ben Musa al-Khwarizmi, géomètre qui leur fut un peu antérieur, et qui a fait d'une célébrité encore plus grande comme auteur d'un Traité d'algèbre imité des Hindous, et composé à la demande du même calife Almansour. Cet ouvrage, qui paraît après les arabes, a été traduit au XII^e siècle (1183) et a contribué puissamment à répandre chez les Européens la connaissance de l'algèbre, appelée alors al-Ghebra et al-Muchabala (Ratification et Comparaison); à tel point qu'on regardait Mohammed ben Musa comme l'inventeur de cette science. Cette fausse notion historique s'est encore répandue à la Renaissance, ainsi qu'on le voit dans les ouvrages de Cardan, de Tartalea et de Lambert. Mais depuis, on a vu que les arabes, puis d'autres les inventeurs de l'algèbre, avaient reçu cette science tout-à-la-fois des Grecs et des Hindous.)

Jusqu'à la Renaissance, on ne connut pas d'autres tentatives sur la mesure de la Terre.

En 1590, Permel, médecin et astronome, mesura l'arc du méridien compris entre Paris et anvers, et trouva pour le degré 57070 Toises. Son procédé de mesure consistait tout simplement à compter

les Tour de Rome de la nature. Depuis p. Paris jusqu'au point où, par l'observation du \odot , il jugen qu'il s'était avancé de 1°. vers le Nord. - Son résultat est d'une exactitude remarquable.).

(Ce moyen, aussi commode qu'expéditif, pour mesurer de grandes distances, était employé pour les routes. on le trouve décrit dans l'architecture de Vitruve, sous ce titre. Par quel moyen on peut savoir, en allant en char ou en bateau, combien l'on fait de chemin: - L. X, Ch. XIV. - Vitruve dit que c'est une des choses les plus ingénieuses qui aient été inventées par les anciens. Le procédé avait une certaine analogie avec les itinéraires de nos moines. au moyen de bornes d'attente, on faisait qu'une borne avait une distance de rotation en rapport avec celle des bornes de la route, et beaucoup moindre: celles-ci faisaient des tours perdus que l'autre n'en faisait qu'un. Cette borne portait à sa circonf. une ouverture qui, à chaque tour, venait coïncider avec l'ouverture d'un vase dans lequel étaient de petites boules, de sorte qu'à chaque tour de la route, une petite boule passait par cette ouverture, et tombait dans un vase inférieur, ce qui faisait connaître le chemin parcouru. - Lq. modification dans ce mécanisme le rendait propre à indiquer le chemin parcouru en bateau.).

En 1616, Snellius, célèbre géomètre Hollandais, employa le premier les mesures trigonométriques combinées avec les observations astronomiques, et il arriva le 24 sept. 1617, résultat beaucoup trop petit.

Lq. temps après, Norwood en Angleterre, par un mélange des procédés de Snellius et de Snellius, et en évaluant les distances de la route au Graphomètre, arriva 17424 T, mesure trop forte.

En 1669, Picard, par le même procédé trigonométrique, détermina avec une précision jusqu'alors inconnue une distance, celle d'Amiens à Malvoisin (?). Ainsi il conclut 17060 T: résultat très-voisin de celui obtenu par la compensation de deux erreurs. Comme par là, la terre était trop courbe de 1/1000, et d'autre part, dans le calcul des latitudes par l'observation des étoiles, il n'avait pas tenu compte de l'aberration et de la nutation, qui n'étaient pas connues alors. Ce fut dans ces opérations que Picard et auxout, son collaborateur, substituèrent la méthode astronomique aux altitudes du Zénith de l'étoile pour la mesure des angles. - Ils eurent soin aussi de calculer les réfractions au centre des signaux, et ils prirent les distances Zénithales avec un grand secteur armé d'un arc en cuivre. - Les opérations, qui auparavant étaient si lentes de procédés nouveaux, furent beaucoup d'importance à Picard qui les dirigeait. Elles sont le fondement des procédés actuels et l'on n'a eu qu'à les améliorer et à les perfectionner.

En 1684, Dominique Cassini continua le travail de Picard, dans le but de mesurer tout l'arc de méridien qui traverse la France, arc de plus de 4°.

En 1690, il s'adjoignit Jacques Camini, son fils, et Philippe Moraldi, son neveu, et reprit le travail au point où il l'avait laissé en 1684; il le continua jusqu'aux frontières de Grasse, et arriva le 24 sept. 1709 T à la latitude de 45°.

En 1714, Jacques Camini, Dominique Moraldi, neveu de Philippe et de Delaville le fils, continuèrent dans le N. d'Amiens à Dunkerque, la mesure commencée par Picard, et arrivèrent dans cette partie

le Degré = 56960^T , lat. de 50° . — on est ainsi en France la mesure de $8 \frac{1}{2}$ du méridien.

Si on donne Résultat, on conclut que le Degré allait en diminuant de l'équateur au pôle. — ainsi il résulterait, par un raisonnement exact, que la Terre était allongée aux pôles.

Cependant comme, à l'époque du 17^e siècle, Newton et Huyghens avaient mis l'opinion que la Terre devait être un ellipsoïde aplati aux pôles : leurs considérations théoriques semblaient avoir dominé par le fait. Mais cette question de la figure de la Terre fut un sujet d'intérêt scientifique, et prouva vivement la curiosité du public, d'autant plus que des expériences sur la durée des oscillations du pendule faites dans le même temps à Caspence par Richet, semblaient indiquer un aplatissement à l'équateur, et militer en faveur de l'opinion de Huyghens et Newton.

Pour la résoudre, on proposa de mesurer deux degrés avec éloignement pour que les erreurs des observations fussent nécessairement moindres que la différence qu'on cherchait.

Plusieurs académiciens entreprirent ces opérations délicates et pénibles. Bouguer et Laumontais partirent pour le Pérou, et Maréchal, l'abbé de La Caille, Cassini, Lommé et Outry allèrent en Laponie.

en Pérou, on trouva 56750^T

en Laponie 57419^T

à Paris, l'arc de Picard, 57490^T

Le Degré allait donc en croissant depuis l'équateur jusqu'au pôle, ce qui résolvait la question en faveur de l'opinion de Huyghens et de Newton, c. ad. en faveur de l'aplatissement aux pôles.

Pour le même temps (1739), Cassini de Thury et Lacaille recommencèrent les mesures exécutées en France. Le grand travail, de principalement à Lacaille, qui s'exécute en moins de deux, est pour l'établissement de Cassini à peu près la mesure de Picard, de l'équateur les erreurs de Dominique et de Jacques Cassini, et de donner une mesure exacte du méridien, qui concorderait, avec les mesures exécutées au Pérou et en Laponie, à prouver l'aplatissement aux pôles.

Ainsi les astronomes français, qui au 16^e siècle, avaient pris l'initiative de cette question importante qui bientôt excita une émulation générale, ont vu la satisfaction de la résoudre, et d'instaurer dans la mécanique des corps célestes un élément indispensable.

C'est alors que Cassini de Thury fut l'idée de sa grande carte de France. Il mesura la surface du territoire d'un vaste réseau de triangles, par lesquels il détermina la position des points principaux rapportés sur la carte.

Pendant ce temps, Lacaille alla au Cap de Bonne-Espérance, dans l'Hémisphère austral, mesurer un arc de méridien, qui lui donna 57040^T pour $37^\circ 18'$ de latitude.

Le succès de ces vastes opérations de Cassini de Thury lui donna l'idée de les étendre dans tout l'Europe. Il proposa en effet, que jusqu'à Rome la perp. un méridien de Paris. — Divers savants ne tardèrent pas à entreprendre de pareilles mesures pour leurs pays.

Il était surtout intéressant de continuer vers le N. i. ad. en anglois, les opérations du méridien de France. C'est ce qu'on fit. on envoya de former, depuis Londres jusqu'à Barcelles, une ligne de triangles qui vint se joindre à celle de la Méridienne de Paris, et permit de connaître la position relative des deux célèbres observations de Paris et de Greenwich.

En 1784, on procéda à la mesure d'une première base dans la plaine de Hounsloppent, au S.O. de Londres, et, en 1787, on commença à former la chaîne des triangles. Les commissaires anglais et Français se réunirent le 23 Septembre à Barcelles. - Les résultats de cette coopération expriment la grandeur du Nœud du méridien calculé au N. de Paris par Lavoisier et Cassini de Thury.

Enfin, quand le Gouvernement Français voulut déterminer une unité fondamentale d'unités des dimensions de la Terre, il fit procéder à une nouvelle mesure du méridien. Cette grande opération a été exécutée en France par Delambre et Méchain, et en Espagne par Biot et Arago. - Elle a servi à fixer la base de notre système métrique.

Mouvement Réel de la Terre autour de la Ligne des Pôles.

Jusqu'ici, nous avons décrit les mouvements du ciel sans nous occuper s'il étoit apparent ou réel. — Mais il est clair que les apparences restent les mêmes en supposant les astres immobiles et la Terre tournant sur son axe dans le même temps.

De ces deux hypothèses, celle de la Terre ou plutôt des astres, nous admettons laquelle est la plus probable.

Nous avons vu que les étoiles sont à des distances de la Terre tellement grandes que les dimensions de notre globe sont insensibles pour rapport à ces distances. En outre, il est certain que les distances de la Terre aux étoiles sont très différentes. — Il est donc très vraisemblable que des corps situés à de très grandes distances, et de plus, à des distances aussi inégales, soient emportés d'un mouvement dont la vitesse est la même pour tous. — ou, autrement, si l'on admet le mouvement de Rotation de la Terre autour de son axe, les corps placés hors d'elle ne participant pas à son mouvement, les astres semblent prendre un mouvement dont la vitesse angulaire est la même pour tous, et l'explication est toute simple.

La forme aplatie de la Terre s'accorde avec cette hypothèse d'un mouvement de Rotation autour de l'axe. — D'abord, si l'on admet qu'elle ait été formée à des époques très éloignées, ce que beaucoup de faits semblent attester, la Rotation autour de l'axe a dû produire l'aplatissement.

Ensuite, les considérations fondées sur les variations de l'intensité de la pesanteur, et qui tendent à prouver l'existence d'un mouvement de Rotation.

Voici les faits observés. — En déterminant un grand nombre de points de la Terre à l'intensité de la pesanteur, on a trouvé qu'elle variait proportionnellement au carré du sinus de la latitude, et que, g étant l'intensité à l'équateur, on pouvait représenter les diverses valeurs de g par la formule

$$g_{\lambda} = g \left(1 + \frac{1}{294} \sin^2 \lambda \right)$$

et sorte qu'au pôle

$$g_p = g \left(1 + \frac{1}{294} \right)$$

les faits peuvent-ils s'expliquer en ayant recours à l'aplatissement de la Terre et en la supposant en équilibre? — Si l'on admet que la Terre soit formée de couches homogènes elliptiques, on trouve par le calcul que l'intensité de la pesanteur au pôle devrait surpasser l'intensité de la pesanteur à l'équateur de $\frac{1}{590}$ de cette dernière intensité, et l'on s'arrête par là la fraction $\frac{1}{294}$ qui est donnée par l'expérience.

au contraire, si l'on a lieu de remarquer un mouvement de Rotation de la Terre autour de son axe, tout s'explique. — En effet, tout qu'un point matériel soulevé pour un centre fixe, est assujéti à décrire un cercle, la pression exercée pour le tenir sur la courbe est la résultante de la force centrifuge et de la composante normale de l'attraction. — Il est facile de voir que cette force centrifuge donne à la pression une différence directionnelle différente de celle de l'attraction, et de plus, la diminue. Or c'est à l'équateur que la force centrifuge est la plus grande, en vertu, elle y est dirigée opposée à l'attraction, donc la pression y est minimum. — on trouve pour le calcul que la pression est diminuée à l'équateur de $\frac{1}{289}$ de sa valeur à cause de la force centrifuge. — Mais d'après l'effet de l'aplatissement de la Terre, elle est diminuée de $\frac{1}{190}$. Donc en tout, pour ces deux causes, l'intensité de la pesanteur est diminuée de

$$\frac{1}{289} + \frac{1}{190} = \frac{1}{194}.$$

On peut donner encore d'autres preuves du mouvement de la Terre. Parmi les courants qui règnent dans l'atmosphère, et qui portent le nom de vents, les plus remarquables sont les vents alisés qui règnent dans les régions équatoriales, et semblent souffler de l'E. à l'O. — on peut les expliquer facilement en admettant le mouvement de Rotation de la Terre autour de son axe.

Les couches atmosphériques en contact avec l'équateur s'éloignent et s'élevant dans les parties supérieures de l'atmosphère, les couches des zones tempérées viennent les remplacer. Elles sont plus froides, et arrivent avec des vitesses égales à la Rotation diurne de la Terre, vitesse même que celle des couches équatoriales. — Mais à mesure que les corps qui sont dans les régions tropicales ont une vitesse relative pour s'élever à ces couches d'air, et il se produit absolument le même phénomène que si ils soufflaient effectivement un vent de l'E. à l'O. en sens contraire du mouvement diurne. — Mais ces vents arrivent perpendiculairement à l'équateur pour remplacer les couches d'air qui s'éloignent. Ils ont en outre une vitesse de l'O. à l'E. La résultante est dirigée du N.O. au S.E. pour conséquemment la direction générale pour les corps placés au N. de l'équateur, dont la vitesse est plus grande, sera dirigée du N.E. au S.O. au contraire, pour ceux qui sont situés au-dessous de l'équateur, il semblera souffler un vent du S.O. au N.E.

La persistance de ces courants d'air dans les régions tropicales est une confirmation de mouvement de la Terre, qui sert de base à leur explication.

C'est une cause du même genre qui produit dans la sphère d'un corps pesant une déviation de la verticale.

Si la Terre fût en repos, un corps qui tombe suivrait la direction perpendiculaire à plomb. — Mais si la Terre tourne, l'axe est pour nécessairement de même. — En effet, en vertu de la Rotation, la partie supérieure de la sphère a une vitesse initiale plus grande que celle des parties inférieures. — Un corps qui tombe du point A, situé au-dessus de la surface de la Terre,

Du Soleil.

Nous allons étudier les lois du mouvement apparent du Soleil sur l'assphère céleste considérée comme fixe. - Si nous reconnaissons plus tard quelles erreurs que nous supposons fixes et auxquelles nous comparons le Soleil, se produisent sur cette sphère pour un mouvement propre, nous ferons quelques rectifications.

Dans les principales observations, on observe Journallement l'ascension droite du Soleil et la déclinaison au moment de son passage au méridien, ascension droite.

Nous avons vu que, pour une étoile, l'Az. suffisait en déterminant l'heure exacte de son passage au méridien, et que pour la différence entre cette heure et celle du passage d'un point connu de la sphère céleste.

Pour les étoiles, cette observation est immédiate.

Pour le Soleil, la détermination de cette heure se fait au moyen des fils octaédriques placés dans la lunette. Mais, comme le Soleil n'apparaît pas dans la lunette comme un point lumineux, on est obligé d'observer les heures du passage des deux bords, et de prendre la moyenne pour avoir celle du passage du centre du Soleil.

Le Soleil ayant un mouvement apparent de $15''$ à $110''$ au milieu de la lunette, qui mesure, de $10''$ à $115''$ - etc.

on trouve que l'Az. du Soleil n'est pas invariable. Donc il n'est pas fixe comme les étoiles.

Déclinaison.

Soit α l'Az. à déterminer la Dist. Zenithale du Soleil: soit z l'Az. de la Dist. Zen. du pôle: on a toujours

$$D. \odot = 90^\circ - (z + p)$$

D étant > 0 ou < 0 suivant que la déclinaison est Australe ou Boréale.

on se sert du cercle mural. - Mais, comme le \odot n'est pas un point, il faut observer le bord inférieur et le bord supérieur, et que pour faire avec le fil horizontal, et l'on prend la moyenne. Mais ces observations ne peuvent être faites en même temps. Cependant comme, au moment du passage du \odot dans le méridien, il y a minimum de distance Zenithale, si les observations sont faites, l'une un peu avant le passage, l'autre, un peu après, il y aura une exactitude suffisante.

on trouve aussi que la Dist. du \odot varie avec les longitudes de l'année.

Diamètre apparent. - Les deux observations nécessaires à la détermination

et nulle, puis ... etc. (Leveries).

Le Diamètre apparent varie aussi. Il est maximum en hiver et minimum en été, du moins pour l'époque actuelle. Il pourra un jour autrement plus tard. Le maximum est de $32' 35''$, le minimum, de $31' 31''$. En moyenne, cela fait $32' 3''$.

avant d'en venir aux lois que suivent les coordonnées du Centre du \odot , nous parlerons d'abord d'une correction importante à faire. — Le Diam. du \odot n'étant pas le même à toutes les époques de l'année, il s'ensuit que la distance de cet astre à la Terre est variable. En outre, comme les dimensions de la Terre sont comparables à la distance au \odot , le Diam. apparent doit varier selon la position des observateurs. — ainsi, dans deux lieux situés aux extrémités d'un même Diam. de la sphère est terrestre, en observant au même instant le Diam. du Soleil, on devra trouver une petite différence entre les résultats. — Cette différence de Diam. dans les résultats à ce qu'ils eussent été si l'on eût observé du centre de la Terre. Le gain de cette situation est très-naturel. Elle devrait se présenter tout d'abord à l'esprit des astronomes.

Cela nous conduit à parler des parallaxes en général.

Des Parallaxes.

On appelle Parallaxe d'un astre (dont la distance n'est pas tellement grande par rapport aux dimensions de la Terre qu'on puisse faire abstraction de ces dernières) l'angle qui, ayant son sommet au centre de l'astre, soutient le rayon de la Terre qui aboutit à l'observateur. — En d'autres termes, la Parallaxe est l'angle sous lequel on voit, du centre de l'astre, le rayon de la Terre.

Quand l'astre est à l'horizon, on a la Parallaxe Horizontale, et quand il est au-dessus de l'horizon, Parallaxe de Hauteur.

Le terme Parallaxe signifie changement. On entend s'il se change qui s'opère dans la position apparente d'un astre sur la voûte céleste quand on l'observe d'un point de la surface de la Terre au lieu de l'observer du centre.

On voit bientôt, que l'effet de la Parallaxe est d'abaisser l'astre vers l'horizon dans le plan vertical, et d'accroître sa distance Zenithale. Soit donc à son zenith : — cet effet est contraire à celui de la Réfraction.

La distance Zenithale observée en un lieu de la Terre, et corrigée de la Réfraction, est dite distance Zenithale apparente, et celle qui en aurait au centre de la Terre, distance Zenithale vraie.

La différence est égale à la parallaxe :

$$Z_v = Z_a - p.$$

Relation entre la Parallaxe horizontale et la Distance de l'astre au centre de la Terre.

Soit π la parallaxe horizontale, R le Rayon de la Terre, D la Distance de l'astre,

$$\sin \pi = \frac{R}{D}$$

et, comme l'angle π est très-petit,

$$\pi = \frac{R}{D}.$$

Relation entre la Parallaxe de hauteur et la Parallaxe horizontale.

Soit ω la parallaxe de hauteur $AS'C$,
et la Distance Zenithale apparente de l'astre. on a

$$\frac{\sin \omega}{\sin \pi} = \frac{AC}{CS'}$$

$$\sin \omega = \frac{AC}{CS'} \sin \pi.$$

Soit π la parallaxe horizontale le même jour. En un jour, la Distance de l'astre au centre de la Terre n'a pas varié sensiblement.

De sorte qu'on peut supposer $CS = CS' = D$. on a donc

$$\frac{AC}{CS'} = \frac{R}{D} = \sin \pi$$

et par suite

$$\sin \omega = \sin \pi \sin \pi$$

et, comme ω et π sont petits,

$$\omega = \pi \sin \pi.$$

on détermine directement π , et l'on peut calculer ω .

Calcul de la Parallaxe horizontale.

à un même instant, on observe l'astre S . Deux points de la Terre, A et B , situés sur le même méridien, et plus éloignés des Distances Zenithales z et z' . on a, en appelant ω et ω' ses parallaxes de hauteur et π sa parallaxe horizontale,

$$\omega = \pi \sin z$$

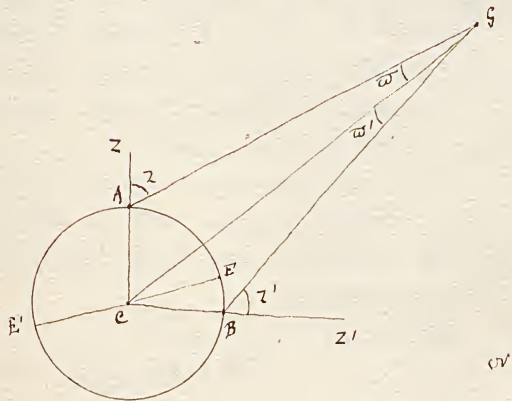
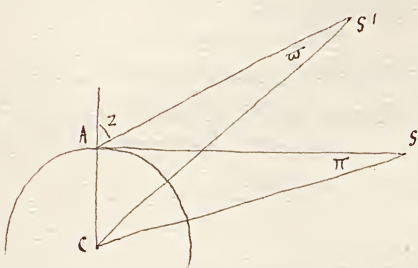
$$\omega' = \pi \sin z'$$

$$z = \omega + ACS \quad z' = \omega' + SCB$$

$$z + z' = \omega + \omega' + ACB$$

or ACB est la somme des deux latitudes λ et λ' des deux points. on a donc

$$\lambda + \lambda' + \pi (\sin z + \sin z') - (z + z') = 0$$



Quin

$$\pi = \frac{2 + \pi' - (\lambda + \lambda')}{\sin 2 + \sin 2'}$$

à l'aid. De la formule $\pi = \frac{R}{d}$, on peut calculer la distance du \odot à la Terre un jour où l'on a calculé sa parallaxe. - Nous verrons plus tard comment on en déduit la distance pour un jour quelconque. - En effet, on en tire

$$d = \frac{R}{\pi}$$

Sans le calcul numérique, il faut prendre

$$d = \frac{R}{\pi \sin 1''}$$

Comme on a trouvé $\pi = 8'',77$, on en conclut $d = R.24066$ millions.

Cette détermination n'est pas suffisante pour connaître les lois du mouvement du Soleil. - Ce qui est essentiel, c'est le rapport des variations des distances à la Terre pour les différents jours de l'année.

Avant maintenant corriger de la Parallaxe les ascensions droites et les déclinaisons du Soleil pour les différents jours de l'année, on pourra facilement construire la trajectoire de cet astre sur un globe céleste en prenant un certain méridien pour origine des ascensions droites. - Détails. - Figure. -

La route qu'on obtiendra ainsi sera seulement la projection de la trajectoire du \odot sur la sphère céleste. On trouvera que c'est un grand cercle, & soit que l'orbite ait une forme plane, dont le plan passe par le centre de la Terre.

Toutefois cette construction géométrique ne pourroit suffire pour établir une vérité aussi importante. aussi le vérifier. L'on pour le faire de la même manière pour le calcul.

Soit $EE'M$ la circonférence que nous supposons être la projection de l'orbite du Soleil, C l'origine des ascensions droites, EE' les points où l'arc $EE'E'$ coupe l'équateur. Posons $\angle C = \varphi$. Désignons par α l'angle des deux plans.

Si le Soleil reste sur ce grand cercle il y aura une relation constante entre la déclinaison du Soleil et son ascension droite dans une quelconque de ses positions.

on a

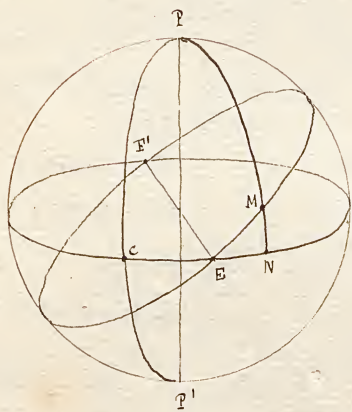
$$CN = A \quad (A = \text{ascens. droite})$$

et par suite

$$EN = A - \varphi$$

$$MN = \Delta \quad (\Delta = \text{déclinaison})$$

Dans le triangle rectangle ENM , on peut tirer entre les divers éléments la relation



$$\cot. \Delta \sin(A-q) = \cot. \omega$$

$$\operatorname{Tg} \Delta = \sin(A-q) \operatorname{Tg} \omega$$

on munit de deux observations D'H et de D'déclinaison, on pourra déterminer ω et q de manière à vérifier cette équation. - Une fois ω et q déterminés, on s'assure que toutes les autres observations satisfont à cette équation; ce qui donnera autant de confirmations que d'équations moins deux.

Cette vérification a lieu. - En conséquence

la projection de la trajectoire du soleil sur la sphère céleste est un grand cercle qu'on a appelé *écliptique*.

Points Equinoxiaux.

Solstices.

ω , obliquité de l'écliptique = $23^{\circ} 28'$ environ.

Origine des ascensions droites. - Inconvenient.

Dans le calcul précédemment indiqué, on ne se contente pas de deux observations. on en considère toute une série, et on les combine par la méthode des moindres carrés.

Voici une autre manière de procéder qui donne une grande approximation de l'époque du passage du soleil à l'équinoxe, et ω , au moyen de deux observations faites dans le voisinage de l'équinoxe, l'une un peu avant, et l'autre un peu après.

Soit A une origine géo. un peu avant le passage à l'équinoxe, on observe l'asc. dr. $\alpha = AN$ et la décl. $\delta = MN$. à ce moment, 20 mars, à midi, la décl. est australe. - Le lendemain à midi, elle est boréale, et l'on note $AN' = \alpha'$ et $M'N' = \delta'$. - Il est évident que, dans l'intervalle de ces deux observations, la déclinaison a été nulle. - Nous aurons, en conservant les notations adoptées,

$$AE = q \quad EN = \alpha - q \quad EN' = q - \alpha'$$

or les deux triangles MNE , $M'N'E$ sont sensiblement rectilignes et semblables. on aura donc

$$\delta : \alpha - q :: \delta' : q - \alpha'$$

$$\delta q - \delta' \alpha' = \delta' \alpha - \delta q$$

$$q = AE = \frac{\delta \alpha' + \delta' \alpha}{\delta + \delta'}$$

Il est facile d'avoir aussi l'obliquité. on en effectue dans le triangle MNE :

$$\delta = (\alpha - q) \operatorname{Tg} \omega$$

$$\operatorname{Tg} \omega = \frac{\delta}{\alpha - q}$$

or

$$\alpha - q = \alpha - \frac{\delta \alpha' + \delta' \alpha}{\delta + \delta'} = \frac{\alpha \delta - \delta \alpha'}{\delta + \delta'} = \frac{\delta(\alpha - \alpha')}{\delta + \delta'}$$

$$\operatorname{Tg} \omega = \frac{\delta + \delta'}{\alpha - \alpha'}$$

Enfin, si l'on veut avoir l'époque précise du passage du Soleil à l'Equinoxe, on notera qu'à noter les époques t et t' auxquelles on fait les observations en M et M' . appelons t_0 l'époque inconnue. Nous aurons

$$t - q : q - t' :: t_0 - t : t' - t_0.$$

Si on t_0 en fonction de q . - Substituant à q sa valeur, on aura t_0 en fonction des données de l'observation.

on peut aussi déterminer l'inclinaison ω de l'Écliptique au moyen de l'observation du Solstice.

Si l'on observe la déclinaison du \odot au 21 Juin, et les jours qui précèdent et qui suivent, on voit qu'elle varie extrêmement peu. Cela est facile à comprendre puisque vers cette époque, le \odot atteint sa déclinaison maximum, et que, dans le voisinage du maximum d'une quantité, les variations sont insensibles. - Néanmoins, on ne trouvera pas rigoureusement les mêmes nombres. - avec les résultats de l'observation, en prenant pour abscisses les jours, pour ordonnées les déclinaisons, construisons une courbe, et menons-lui une tangente horizontale. Le point de contact répondra à une certaine abscisse, qui donnera l'époque du passage du Soleil au Solstice. on aura aussi la déclinaison maxima du \odot , qui mesure ω . - on a donc résolu la question, on peut questionner si est vrai, puisqu'on a en l'œuvre une construction graphique, mais le calcul donnerait la même exactitude.

on trouve aussi

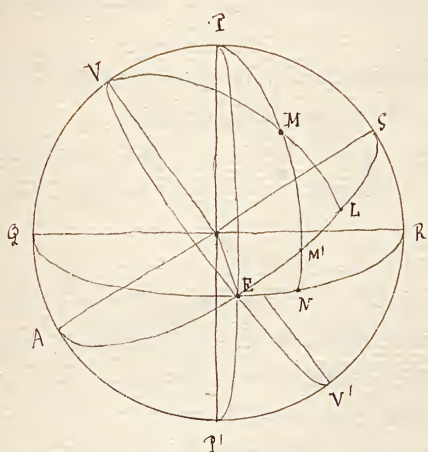
$$\omega = 23^\circ 27' 57''$$

Cette inclinaison est à peu-près constante. on trouve qu'elle varie actuellement de $48''$ par siècle, en diminuant. - Plus tard, cette diminution pourra se changer en une augmentation.

Nous avons dit que c'était à partir de l'Equinoxe de Printemps que les astronomes comptent les ascensions droites. - Nous indiquons dans la suite les raisons de ce choix. - Et, au moyen des asc. Dr. et des déclinaisons des différentes étoiles, j'ai fait de dresser une carte d'étoiles, ou bien un catalogue. Mais ces catalogues construits à des époques différentes au moyen de ces coordonnées diffèrent sensiblement, et même se bécotaient entre eux quand on compare les cartes ou catalogues aux observations faites il y a deux ans, à l'origine de l'astronomie. Il s'ensuit donc de fournir la loi de ces variations, et pour cela, il est plus commode de quitter les coordonnées de l'ant. à l'heure, et d'en prendre de nouvelles.

Pour cela, j'imagine un axe perp. au plan de l'Écliptique. Je va poser la sphère en deux points V et V' qui sont, le premier, le Pôle boreal de l'Écliptique, le second, son Pôle austral.

Soit M un astre quelconque. EM et MN sont ses ascensions droites et sa déclinaison, c.àd. les anciennes coordonnées, α et δ . Je mène le grand cercle VNV' . Je coupe le plan de l'Écliptique en L . Soit EL l'angle Longitude et ML la Latitude de l'astre. - Soit sur l'Écliptique



$$MN = \delta \quad EN = \alpha \quad ML = \lambda \quad LE = l.$$

et proposerons nous le
problème.

Étant donnés δ et α , trouver l et λ , et réciproquement.

Il est facile de voir que c'est une question de trigonométrie sphérique.

En effet, considérons le triangle sphérique VPM . VP est connu, c'est ω , l'inclinaison de l'équ. sur l'éléphérique. PM est aussi, c'est $90^\circ - \delta$.

L'angle $VPM = VPE + EPN = 90^\circ + \alpha$.

Connaisant 3 éléments de ce triangle, on en déduit les autres, par exemple, VM qui est $90^\circ - \lambda$ et l'angle MVP qui vaut $90^\circ - l$.

Calculons l . Il nous faut pour cela une relation entre les côtés VP , PM , et les angles VPM , PVM .

$$\sin VP \cos PM = \cos PVM \sin VPM + \cos VP \cos VPM$$

ou

$$\sin \omega \cos \delta = \cos l \sin(90^\circ + \alpha) + \cos \omega \cos(90^\circ + \alpha)$$

$$\cos l = \frac{\sin \omega \cos \delta + \sin \alpha \cos \omega}{\cos \alpha} \quad (1)$$

Pour avoir λ , il faut une relation entre les 3 côtés et un angle :

$$\cos VM = \cos VP \cos PM + \sin VP \sin PM \cos PVM$$

ou

$$\sin \lambda = \cos \omega \sin \delta - \sin \omega \cos \delta \sin \alpha \quad (2)$$

Si l'on veut résoudre le problème inverse, on procède de même. Les données sont, dans le triangle VPM

$$VM = 90^\circ - \lambda \quad VP = \omega \quad MVP = 90^\circ - l$$

Les inconnues

$$PM = 90^\circ - \delta \quad VPM = 90^\circ + \alpha$$

ou aussi

$$\sin \delta = \sin \lambda \cos \omega + \cos \lambda \sin \omega \sin l \quad (3)$$

et

$$\cos VM \sin VP = \cos VPM \sin PVM + \cos VP \cos PVM$$

$$\cos \lambda \sin \omega = -\cos \alpha \cos l + \cos \omega \sin l$$

$$\cos \alpha = \frac{\cos \omega \sin l - \cos \lambda \sin \omega}{\cos l} \quad (4)$$

Il est bon de remarquer que les formules (3) et (4) peuvent se déduire de (2) et de (1) en échangeant δ en λ , α en l , et ω en $-\omega$.

Ces sont les formules relatives à un astre quelconque. Si l'astre est le \odot , l'angle de latitude est constamment nulle, elles deviennent

$$\begin{cases} \cos \alpha = \cos \omega \cos l \\ \sin \delta = \sin \omega \sin l \end{cases}$$

on pourrait d'ailleurs y arriver directement, par la considération du Triangle Rectangle $EM'N$. Car

1°. Le sinus d'un côté de l'angle droit $sin S$, égale le produit du sinus de l'hypoténuse $sin L$ par le sinus de l'angle opposé, $sin A$.

2°. La tg . d'un côté de l'angle droit, $tg d$, est égale au produit de la tg . de l'hypoténuse $tg l$ par le cosinus de l'angle compris, $cos a$.

Si l'on suppose tous les astres à l'écliptique, à l'aide de ces nouvelles coordonnées, on verra que la latitude reste sensiblement constante, tandis que les longitudes augmentent toujours dans le même sens, et cette augmentation est en moyenne de $50''$, 1 par an.

On peut imaginer cette augmentation de longitude en supposant que la sphère céleste tourne autour de l'axe de l'écliptique dans le sens du mouvement propre du Soleil. Ici alors, la latitude reste constante, tandis que les longitudes augmentent. — Mais le même phénomène peut se concevoir d'une autre manière, en imaginant que l'axe de l'écliptique ne reste fixe ainsi que la sphère céleste, et que c'est le plan de l'équateur qui se déplace, de manière que son inclination sur l'écliptique reste constante, et que le point d'intersection E de ces deux grands cercles reste sur l'écliptique en sens contraire des longitudes.

De ces deux mouvements, lequel est le plus probable? Le premier exigerait que toute la sphère se déplaçât: dans la 2°. hypothèse au contraire, il suffit d'admettre que l'axe de la Terre se déplace de façon à produire cet accroissement de longitude. — C'est elle qui la plus probable, et nous en démontrons la vérité.

Il est facile de voir quelle est la nature de ce mouvement de l'axe de la Terre autour de celui de l'écliptique. En effet, l'équateur se déplaçant de façon à conserver à tout-ou-rien la même obliquité sur l'écliptique, et à rétrograder sur ce cercle de $50''$, 1 par an, il faut que l'axe de la Terre tourne autour de celui de l'écliptique de façon à décrire, toujours dans le même sens, un cercle droit.

Pour quel équinox dériverait l'écliptique une révolution complète, il faut environ 2500 ans ou 2600 ans. — Il n'y a pas d'inconvénient à faire le calcul avec une plus grande approximation: car il y a dans ce phénomène de la Précession des Équinoxes des Inégalités et des variations dont nous parlerons tout-à-l'heure.

ainsi, le déplacement de l'équinox est de sens contraire au mouvement propre du \odot , ou bien dans le même sens que le mouvement propre apparent.

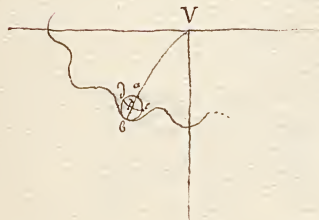
Pour les anciens, qui voyaient la Terre fixe, l'équinox devait donc avancer: de là le nom qu'ils donnaient au phénomène qui nous occupe. — Les modernes, au contraire, regardant la Terre comme mobile autour d'un axe, le déplacement de l'équinox sera en sens contraire du mouvement de la Terre: l'équinox rétrogradera sur l'écliptique: aussi a-t-on substitué à l'ancienne dénomination celle de rétrogradation des points équinoxiaux.

C'est Hipparque qui le premier a reconnu cette variation des longitudes des étoiles : et Ptolémée, 300 ans plus tard, confirma cette remarque par des observations plus précises. — Toutefois, il donna un nombre bien différent du véritable, car il fit que l'équinoxie rétrograderait de $36''$ par an.

Toutefois, si l'on détermine à des époques rapprochées les longitudes et les latitudes des étoiles, on voit que le mouvement de l'axe de la Terre autour de celui de l'écliptique ne représente que la moyenne des observations. — ainsi, ayant la longitude et la latitude à un instant, si l'on calcule la longitude et la latitude du même astre pour une autre époque en ayant égard au mouvement conique précédent, on ne trouve que des résultats approchés.

Bradley est le premier qui ait donné la loi de ces variations. Il a montré que l'ensemble de tous les phénomènes peut se concevoir en supposant que l'axe de la Terre ne décrit pas précisément un cône droit, mais qu'il tourne autour d'un axe fictif qui, lui, décrirait un cône droit. ainsi, concevons une première droite décrivant un cône droit ayant pour axe celui de l'écliptique, et pour angle au sommet $\omega = 23^\circ 28'$, et d'autre part, une seconde droite passant constamment par le centre de la Terre, impuissante par la gravitation de ce cône, et dont le mouvement relatif autour de la première serait de décrire une petite ellipse. C'est cette seconde droite qui donnera à chaque instant la position de l'axe de l'axe de la Terre. — Pour un observateur impuissant avec l'axe de la Terre, cet axe semblera décrire une ellipse, mais en réalité, le mouvement sera beaucoup plus compliqué, et la trajectoire sur la voûte céleste sera une ligne sinuée. — le grand axe de cette petite ellipse est dirigé vers le pôle de l'écliptique, et correspond sur la sphère à un angle de $14''$, 5. le petit axe a pour longueur $13''$, 74. le temps employé par l'axe de la Terre à décrire cette petite ellipse est de 18 ans $\frac{2}{3}$.

Voilà quelles modifications le mouvement de l'axe de la Terre doit apporter dans les longitudes et les latitudes.



Quand l'axe est à son extrémité en B, à l'extrémité du grand axe, sa longitude est la longitude moyenne, mais sa latitude vraie est supérieure à la latitude moyenne de $9''$, 28. Quand il est en a, la latitude est moindre que la latitude moyenne de $9''$, 28. — lorsqu'on considère l'axe en D, à l'extrémité du petit axe, la latitude est nulle, et la longitude surpasse la longitude moyenne de $13''$, 74, ainsi que l'on trouve égal à $\frac{6'' \cdot 37}{\cos \lambda}$ la latitude.

Dans les positions intermédiaires, la longitude et la latitude sont toutes deux altérées.

Il faut donc bien distinguer la longitude et latitude vraies des longitude et latitude moyennes. — Les vraies sont celles qui surviennent à l'instant

De la Terre n'avait pour d'autre mouvement que celui d'un cercle, et les p. n. n. n. sont celles qui ont été quand on tient compte des Vibrationes.

De même la position de l'Equinoxe vrai n'est pas exactement celle qui résulte du simple mouvement de précession en vertu duquel l'une de l'Equinoxe d'origine est un cercle droit. Il sera tantôt en avant; tantôt en arrière. on distingue donc l'Equinoxe vrai de l'Equinoxe moyen.

C'est à partir de l'Equinoxe moyen qu'on compte les Longitudes et les Latitudes.

Longitude de l'Ecliptique vraie aussi de $18^{\circ}, 5'$ en 18 ans $\frac{9}{10}$. Il y a donc aussi à distinguer l'Equinoxe vrai et l'Equinoxe moyen. C'est à partir de ce dernier qu'on compte les Latitudes moyennes.

Il nous reste maintenant à étudier la véritable forme de la Trajectoire du Soleil: car jusqu'ici, nous savons seulement qu'elle est plane. - Il faut connaître à la fois la vitesse angulaire avec laquelle le Soleil parcourt cette trajectoire à chaque instant, et la Distance à la Terre. Car ces deux choses ne sont pas tout à fait indépendantes l'une de l'autre, comme elles le paraissent au premier abord, les variations de la vitesse angulaire du Soleil dépendent principalement de celle de sa Distance à la Terre.

Une simple observation nous montre sur-le-champ que la vitesse angulaire du Soleil n'est pas constante. Car, en prenant jour pour jour l'accroissement de longitude, on voit qu'il n'est pas proportionnel à l'écoulement du temps. - ainsi, à deux jours nous nous rapprochons, premier l'accroissement de longitude, et divisons le par l'intervalle de temps: nous avons la vitesse angulaire moyenne. Si à divers époques, nous faisons la même opération, nous trouverons des résultats variables d'après une loi assez compliquée, si bien qu'il est difficile d'en tirer des conséquences utiles.

Mais on peut déterminer chaque jour la variation du Diam. apparent, et en déduire la variation de la Distance.



Soit S le Soleil, O le centre de la Terre, Δ l'angle AOB, c. ad. le Diam. apparent de l'astre, D la Distance au centre de la Terre, et $2R$ le Diamètre

du C. le triangle rectangle OAS donne

$$\sin \frac{\Delta}{2} = \frac{R}{D}$$

et, comme Δ est un très-petit angle,

$$\Delta = \frac{2R}{D}$$

ou $2R$ est constant. Donc

le Diamètre apparent est en raison inverse de la Distance.

Si donc on fait une table donnant pour chaque jour le Diam. apparent et la vitesse angulaire, on verra que

la vitesse angulaire moyenne est proportionnelle au carré du Diamètre apparent, ou conséquemment, en raison inverse du carré de la Distance à la Terre.

C'est la 3^e loi de Kepler.

On a vu que Newton a remarqué, que le Soleil ne paraît pas se mouvoir avec une vitesse constante. Car, si cela était, la vitesse angulaire apparente devrait varier en raison inverse de la simple distance, tandis qu'on observe une variation plus rapide.)

Kepler a donné cette loi sous une forme un peu différente, en disant que les aires décrites par le rayon vecteur sont proportionnelles au temps.

Mais il est facile de ramener le 1^{er} énoncé au second.

Soit u la vitesse angulaire, T la période de la révolution, S et S' deux positions successives du \odot sur son orbite pendant un intervalle de temps très-court T . Nous aurons

$$\text{angle } S'TS = uT$$

Or, d'après le 1^{er} énoncé

$$u = \frac{c}{ST^2}$$

Donc

$$S'TS = uT = \frac{cT}{ST^2} = \theta$$

$$cT = \theta r^2$$

Or r^2 n'est autre chose que l'aire $S'TS$ qui ne diffère du secteur circulaire que d'un infiniment petit du 2^d ordre, quelle que soit l'altitude la forme de l'orbite du Soleil. — Donc l'aire décrite par le rayon vecteur \odot est autre chose qu'une quantité proportionnelle au temps. C'est là le second énoncé, celui de Kepler. — Mais sous cette forme, il est moins facile à vérifier que sous la première.

Considérons qu'on construisait sur un plan les diverses positions du Soleil au moyen de la longitude et de son diam. apparent. On tracerait une ligne semblable à celle que le Soleil décrit réellement. On trouverait ainsi que

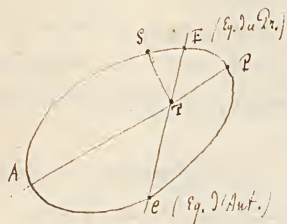
la trajectoire du \odot est une ellipse dont le centre de la Terre occupe un des foyers.

C'est la 2^e loi de Kepler.

Mais on verra d'ailleurs facilement que cette ellipse est parcourue. Elle est en raison inverse du carré de la distance.

Mais nous construirons donc tout ce qui a rapport au Soleil, si nous connaissons la grandeur de son orbite.

Il est évident de vérifier par le calcul une loi aussi importante, et nous venons nous faire cette vérification. — Nous supposons l'ellipse rapportée à son foyer et à un axe fixe, qui représentera la ligne des équinoxes, pour une période. Dans cette ligne, nous entraînerons successivement A l'apogée & que fait d'une position sur le rayon vecteur mené à l'extrémité du petit axe, c'est-à-dire au périhélie, et l'excentricité de l'ellipse. Par deux observations, nous calculerons ces deux constantes, et les substituerons dans l'équation de la courbe, il faudra qu'elle soit vérifiée pour la distance du Soleil et la longitude pour une époque quelconque.



Les angles ω et θ sont comptés dans le sens E S A.

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = \angle STP \\ \theta = \angle STE \\ \xi = \angle ETI \end{array} \right.$$

d'équation De l'ellipse (rapportée au foyer T, pour l'appointer au foyer à l'axe principal ATP dirigé vers le sommet T le plus voisin, et

$$r = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \frac{c}{a} \cos \omega} = \frac{\frac{a^2 - c^2}{a}}{1 + \frac{c}{a} \cos \omega} = \frac{a(1 - \frac{c^2}{a^2})}{1 + \frac{c}{a} \cos \omega}$$

posant $\frac{c}{a} = e$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \omega}$$

Soit T la terre, P le périhélie, A l'apogée, S une position quelconque Du Soleil, E T e le ligne Du Equinoxe. Dans l'un compte les Longitudes. - on aura

$$1/r = \frac{1 + e \cos(\theta - \xi)}{a(1 - e^2)}$$

Déterminons maintenant les trois constantes arbitraires a , e et ξ qui entrent dans cette formule.

Alors, a est arbitraire, puisque nous ne voulons calculer que des quantités proportionnelles aux distances Du S à la T. - Quant à ξ et e , on peut les obtenir par deux observations qui donneront r , et par suite, deux équations entre ξ et e .

On peut aussi obtenir ces deux constantes séparément.

Détermination De l'excentricité.

ainsi l'excentricité peut se déterminer De la comparaison Des Diamètres apparents maxima et minima Du Soleil. - En effet, le Rayon r est réciproquement proportionnel au Diamètre apparent Δ , on peut donc poser

$$\frac{1}{r} = k \Delta$$

et par suite, l'équation précédente peut s'écrire

$$k \Delta = \frac{1 + e \cos(\theta - \xi)}{a(1 - e^2)}$$

le Diam. apparent sera le plus grand possible quand $\cos(\theta - \xi) = 1$, c.à.d. quand $\theta = \xi$. Soit Δ' cette valeur maxima. on aura

$$k \Delta' = \frac{1 + e}{a(1 - e^2)} = \frac{1}{a(1 - e)}$$

au contraire, il sera le plus petit possible quand $\cos(\theta - \xi) = -1$, ou $\theta = \xi + \pi$. appelons Δ'' ce Diam. apparent minimum: nous aurons

$$k \Delta'' = \frac{1 - e}{a(1 - e^2)} = \frac{1}{a(1 + e)}$$

Divisant membre à membre ces deux équations

$$\frac{\Delta'}{\Delta''} = \frac{1 + e}{1 - e}$$

D'où

$$e = \frac{\Delta' - \Delta''}{\Delta' + \Delta''}$$

Relation qu'on peut au reste obtenir sans partir De l'équation De l'Ellipse (voir le calcul).

ainsi, l'observation Des Diamètres apparents Du Soleil donne un

Donne un moyen de calculer l'écartsité. Car, ayant déterminé pour une fois le diamètre apparent, et ayant ainsi formé une Table, il sera facile par son inspection, d'en conclure les diamètres apparents maximums et minimums, et de substituer leurs valeurs dans l'Equation ci-dessus.

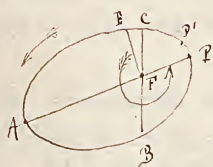
Mais, comme la Détermination directe du diamètre apparent, qui est un petit angle, laisse toujours quelque incertitude, on préfère réduire le diamètre à la vitesse angulaire du \odot qu'on peut déterminer avec une précision plus grande. — Cette vitesse angulaire est, comme nous l'avons dit, le rapport de l'accroissement de longitude à l'intervalle de temps : et deux vitesses angulaires sont proportionnelles aux carrés des diamètres apparents qui leur correspondent. Par conséquent, les diamètres apparents sont proportionnels aux racines carrées des vitesses angulaires. — Si donc j'appelle v la vitesse angulaire du \odot pour un jour quelconque, et v' les valeurs maxima et minima de v pour toute l'année, on peut dans la formule précédente remplacer A' et A'' par $\sqrt{v'}$ et $\sqrt{v''}$; ce qui donne

$$e = \frac{\sqrt{v'} - \sqrt{v''}}{\sqrt{v'} + \sqrt{v''}}$$

On trouve ainsi que $e = 0,0164 = \frac{1}{60}$ environ. — Cette écartsité n'est pas constante absolument. Elle diminue d'environ 0,0004 par siècle, variations extrêmement petites, que ne pourrait indiquer l'inspection, et qui résultent des calculs et de la théorie.

Détermination de la longitude du Périgée.

On peut trouver aussi directement la longitude du Périgée.



Considérons l'ellipse décrite par le Soleil, et dont la Terre occupe un foyer F. Si par F nous traçons une ligne CB quelconque, elle partagera l'ellipse en deux parties dont les arcs sont égaux, et, comme les arcs décrits par le Soleil sont proportionnels au temps, les deux parties CFB, CFB de l'ellipse

seront parcourues dans des temps égaux. — Or la différence de longitude des points B et C est 180° ; par conséquent, si l'on prend sur l'ellipse deux points B et C dont les longitudes diffèrent de 180° , on trouvera que le temps employé pour aller de B en C sera différent de celui qui est nécessaire pour aller de C en B. — Mais si la droite BC est le grand axe, c.à.d. si elle joint le Périgée à l'apogée, elle partagera l'ellipse en deux parties d'arcs égaux, et qui seront par conséquent parcourues dans le même temps.

Donc, pour déterminer la longitude du Périgée, il faut trouver deux points A et B dont les longitudes diffèrent de 180° , et qui soient tels que le Soleil mette le même temps pour aller de A en B et de B en A. Cela est facile. Car on a pour une fois le diamètre du Soleil au moment de son passage au méridien, et l'on a si l'on veut de ce passage exprimée en temps sidéral. Si l'on prend une longitude de ce passage, on trouvera dans le Tableau l'instinct où le Soleil avant justement cette longitude, ou bien, si on ne le trouve pas, il est facile, par un calcul d'interpolation, de le déduire des nombres qui précèdent et qui suivent. — on augmente cette longitude de 180° , et l'on cherche l'instinct correspondant t_1 . — on augmente encore cette longitude de 180° . Vous aurez

Directement ou par interpolation l'instant t_2 correspondant à h_2 . Il n'est pas au hasard, vous trouverez $t_2 - t_0$ diff. de $t_2 - t_1$. Mais, par un calcul tout facile, vous déterminerez quelle est la longitude qu'il faut prendre pour que $t_2 - t_0 = t_2 - t_1$; ce sera précisément la longitude du Périgé, ou bien celle de l'apogée. Mais la distinction est facile au moyen des diamètres apparents. Si le diamètre apparent est maximum, on a la longitude du périgée; si il est minimum, c'est de l'apogée qu'il s'agit.

Le 1^{er} janvier 1850, la longitude du périgée était de $280^{\circ} 14' 30''$ en sorte que, sur la figure ci-dessus, pour aller de l'équinoxe E au Périgée I, il faut aller d'une de 280° environ de gauche à droite en passant par le bas.

Cette longitude n'est pas constante. Elle augmente pour deux raisons. L'équinoxe du printemps se déplace de sorte que, quand même l'orbite du Soleil restait fixe, le point E reculant sur cette orbite d'environ $50''$ par an, la longitude du périgée doit augmenter d'environ $50''$ par année. - Mais de plus, le périgée a un mouvement propre: c'est l'orbite du Soleil autour du point F de $11''$, 8. Dans le sens où croissent les longitudes, de sorte qu'en huit d'une année, les longitudes augmentent de $61''$, 9.

On entend par année sidérale le temps qu'il faut pour que le cercle apparent du Soleil revienne à la même position par rapport aux étoiles.

On peut déterminer sa durée avec une grande exactitude en effet, des observations très-anciennes nous ont appris quelle était la position du \odot par rapport aux étoiles à des époques très-écoulées. Si nous observons aujourd'hui la même époque à laquelle le \odot repassait juste la même position, comme on voit par la chronologie combien de jours sidéraux sont écoulés depuis cette époque jusqu'à l'instant présent où nous faisons l'observation, en divisant le nombre de jours sidéraux par le nombre d'années qui se sont écoulées, nous aurons exactement la durée de l'année sidérale. - L'erreur ne peut provenir que d'incertitudes dans les observations anciennes du jour où le Soleil se trouvait au même temps qu'une certaine étoile. Mais en admettant une erreur de une ou deux heures, cette erreur divisée par 7000 ans serait très-petite.

On peut aussi trouver la durée de l'année sidérale par des observations plus modernes. Et, comme ces observations sont susceptibles d'une précision très-grande, le résultat est aussi.

On distingue d'autres sortes d'années.

On entend par année tropique le temps qu'emploie le Soleil à revenir à l'équinoxe du printemps, ou mieux, le temps qui s'écoule entre deux passages successifs du Soleil à l'équinoxe du printemps. La durée en jours sidéraux est de $365^{\text{d}} 24^{\text{h}} 22^{\text{m}} 6^{\text{s}}$. - Elle peut également se conclure des observations anciennes, par celles d'Hippocrate

et de l'écliptique nous donnent les Époques du passage du Soleil à cet Équinoxe. On sait d'ailleurs par l'époque désignée par Hippocrate ou Ptolémée jusqu'à nos jours combien il s'est écoulé d'années Égyptiennes, de jours. En divisant le nombre total de jours par le nombre d'années, nous aurons la durée moyenne de l'année Égyptienne en jours Solaires.

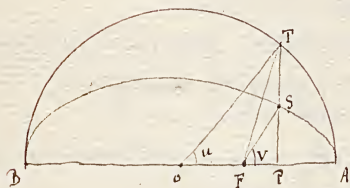
Si l'on voulait conclure de là la valeur de l'année Sidérale, il y aurait qu'à remarquer que la différence entre les deux années provient seulement du déplacement de l'équinoxe du printemps, et que l'année Sidérale est plus longue que l'année Égyptienne du temps employé par le Soleil pour parcourir l'arc de l'écliptique correspondant à $50''$, 1. Ce temps se trouve par une simple proportion. Car, pour l'année Égyptienne, le Soleil a parcouru l'arc de $360^\circ - 50''$, 1. Donc

$$360^\circ - 50'' : 360^\circ :: 366^d; 242264 : x$$

Donc x .

On distingue encore l'année anomalistique. C'est l'intervalle entre deux passages successifs du Soleil au Périgée. Le Soleil (fig. précédente) partant du Périgée qui est en P, revient en P'. L'année anomalistique suppose donc l'année Sidérale du temps employé à parcourir PP'. Mais nous avons vu que le déplacement du Périgée est de $61''$, 9. Donc, par une proportion analogue à la précédente, on aura la durée exacte de l'année anomalistique en jours Solaires.

Une fois tous les éléments du mouvement du Soleil connus, on peut conclure pour chaque jour de l'année la Longitude de cet astre, et une quantité proportionnelle à sa distance.



En effet, soit AB le grand axe de l'ellipse, F le foyer occupé par la terre, S une position quelconque du Soleil à l'époque t , ce temps étant compté à partir du Périgée A. — Soit r la distance, $SFA = v$. — Quant à la longitude que nous cherchons, elle est égale à $v + \epsilon$, ϵ étant la longitude du Périgée.

Je désigne par AB comme d'habitude une circonférence. Je mène l'ordonnée TSP, et je pose $TOA = u$. Les variables u et v sont deux variables liées, entre lesquelles, et t est facile d'établir

une relation : et, comme elles peuvent s'exprimer facilement en fonction du temps, on voit que t sera en définitive exprimé en fonction du temps.

Remarquons d'abord que l'aire FAS est proportionnelle au temps, et si l'on appelle T la durée d'une année Égyptienne, en divisant l'aire totale par T , on aura l'aire décrite par le Soleil dans l'année de temps. Donc l'aire FAS sera égale à l'aire totale multipliée par la fraction $\frac{t}{T}$

$$FAS = E \cdot \frac{t}{T}$$

Donc $E = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$. Donc

$$FAS = \frac{\pi a^2 t}{T} \sqrt{1-e^2}$$

Les aires FTA, FSA sont dans le rapport du grand axe au petit. Donc

$$\text{aire FAT} : \text{aire FSA} :: a : a \sqrt{1-e^2}$$

$$FAT = \frac{\pi a^2 t}{T} \sqrt{1-e^2} \cdot \frac{a}{a \sqrt{1-e^2}}$$

$$FAT = \frac{\pi a^2 t}{T}$$

Autrefois l'aire OFT est celle d'un triangle. C'est la moitié du produit de son côté par le sinus de l'angle compris. Donc

$$OFT = \frac{1}{2} a \cdot ae \cdot \sin u = \frac{a^2}{2} e \sin u$$

Pi, à l'aire OFT, on ajoute FTA, on aura l'aire du secteur circulaire OTA. ainsi

$$OTA \text{ ou } \frac{1}{2} a^2 u = \frac{1}{2} a^2 e \sin u + \frac{\pi a^2 t}{T}$$

Donc

$$u - e \sin u = \frac{2\pi t}{T} \quad (\alpha)$$

C'est là l'équation qui existe entre u et t . Or l'angle $\frac{2\pi t}{T}$ exprime soit la longitude du Soleil si elle croissait uniformément. En effet, puisque T est la durée d'une année tropique, pendant T , la longitude du Soleil augmente de 2π . Donc, si la longitude augmentait uniformément, elle croîtrait de $\frac{2\pi}{T}$ dans l'unité de temps, et par conséquent, de $\frac{2\pi t}{T}$ dans le temps t . - Donc conséquemment, si, à cet accroissement de longitude, on ajoute e qui est la longitude du Périgée, on aura u qui est appelée la longitude moyenne du Soleil, tandis que la longitude vraie est $u + e$. $\frac{2\pi t}{T}$ est u qui est appelée le Mouvement moyen de la Longitude du Soleil. On le désigne habituellement par la lettre n . - L'eq. précédente devient alors

$$u - e \sin u = nt$$

$nt + e$ est la longitude moyenne.

La quantité $nt = \frac{2\pi t}{T}$ se nomme aussi anomalie moyenne, de sorte que si, à l'anomalie moyenne, on ajoute la longitude du Périgée, on a la longitude moyenne.

L'angle u n'est pas égal à nt , puisque l'excentricité e n'est pas nulle. on l'appelle anomalie excentrique.

Enfin l'angle v s'appelle anomalie vraie. En sorte que la longitude vraie est égale à l'anomalie vraie augmentée de la longitude du Périgée.

J. Du maintenant qu'il est facile d'avoir r et v en fonction de u . - En effet, le rayon vecteur r est une fonction rationnelle de l'abscisse

$$r = a - e \cdot OP$$

Donc

$$OP = OT \cos u = a \cos u$$

donc

$$r = a(1 - e \cos u) \quad (1)$$

Pour avoir maintenant v en fonction de u , il suffit de comparer cette valeur de r à celle qui est donnée par l'équation polaire de l'ellipse:

$$r = a \frac{1 - e^2}{1 + e \cos v}$$

on en tire

$$(1 - e \cos u)(1 + e \cos v) = 1 - e^2$$

$$1 + e \cos v - e \cos u - e^2 \cos u \cos v = 1 - e^2$$

$$\cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}$$

donc

$$1 - \cos v = \frac{(1+e)(1 - \cos u)}{1 - e \cos u}$$

$$1 + \cos v = \frac{(1-e)(1 + \cos u)}{1 - e \cos u}$$

$$\cos \frac{v}{2} = \frac{1+e}{1-e} \cdot \frac{1 - \cos u}{1 + \cos u} = \frac{1+e}{1-e} \cos^2 \frac{u}{2}$$

$$\cos \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \frac{u}{2} \quad (2)$$

Les formules (1) et (2) expriment r et v en fonction de u . - Mais, l'époque t étant donnée à partir de l'époque du passage au périhélie, il sera facile de calculer nt , et l'équation transcendante (2) donnera u . Par conséquent r et ℓ seront donnés en fonction du temps.

Il faudrait à indiquer comment on peut résoudre approximativement l'équation (2), c.à.d.

$$u - e \sin u = nt. \quad (2')$$

on en tire

$$u = nt + e \sin nt + \frac{e^2}{2} \sin 2nt + \dots$$

La question que nous venons de résoudre s'appelle le Problème de Kepler.

La différence entre l'anomalie vraie et l'anomalie moyenne, $v - nt$, on, ce qui est la même chose, la différence entre la longitude vraie et la longitude moyenne est ce qu'on appelle l'Equation du Centre. L'origine de ce nom vient de ce qu'on avait d'abord supposé pour expliquer le mouvement du Soleil que cet astre décrirait autour de la Terre un cercle dont la Terre n'occupait pas le Centre, et l'on avait supposé quelle position il fallait donner à la Terre pour expliquer le mouvement du Soleil. Le mot Equation exprimait dans les anciens ouvrages le qu'il fallait ajouter à une valeur moyenne pour obtenir la valeur exacte. D'où le nom précédent.

Si l'on développe l'Equation du Centre sous les puissances de l'excentricité, on trouve

$$v - nt = 2e \sin nt + \frac{5e^2}{4} \sin 2nt + \dots$$

Cette Equation du Centre se détermine au périhélie et à l'apogée par

alors $nt = 0$ ou $nt = \pi, 2\pi, \dots$ et par suite $\sin nt$ et $\cos nt = 0$.

Elle acquiert son maximum entre le Périgée et l'Apogée; et positive quand le Soleil va du Périgée à l'Apogée: ainsi, dans cette portion du mouvement, la longitude vraie est plus petite que la longitude moyenne. au contraire, quand le S va de l'Apogée au Périgée, l'équation du Centre est négative, et par conséquent la longitude vraie est supérieure à la longitude moyenne. Ceci se voit assez bien. En effet, au Périgée, le Soleil a la vitesse maximum, tandis qu'elle est minimum à l'Apogée. Donc, du Périgée à l'Apogée, il doit être en avance sur un Soleil fictif moyen qui parcourrait uniformément l'écliptique, tandis qu'il est en retard de l'Apogée au Périgée, il doit être en retard.

Pour avoir le maximum de l'éq. du Centre, il faut égaler à zéro sa dérivée

$$0 = 2en \cos nt + \frac{5e^2 n}{2} \cos 2nt + \dots$$

Cette équation peut se résoudre pour approximation, et l'on en conclura l'époque à laquelle le maximum a lieu. Partant ensuite cette valeur de t dans l'équation du Centre, on obtiendra le maximum de cette équation exprimé en fraction de l'excentricité, c.àd. une relation entre l'excentricité et le maximum de l'équation du Centre. — Donc, si l'on connaît l'une ou l'autre de ces deux quantités, la seconde peut s'en déduire, et l'on trouve le moyen le plus précis de déterminer l'excentricité.

Il faut pour cela trouver par l'observation le maximum de l'équation du Centre, et la chose n'est facile. En effet, connaissant l'époque du passage du Soleil au Périgée, et la durée de l'année; nous pourrions assigner pour époque pour la longitude moyenne du Soleil, c.àd. celle qui aurait été celle si la longitude variait proportionnellement au temps. Quel observation nous détermine pour époque pour la longitude vraie: prenant la différence de ces deux longitudes pour époque pour l'année, il sera facile de faire des Tables de ces différences, et d'avoir pour chaque jour de l'année le Maximum de l'équation du Centre. — Voici la détermination de l'excentricité.

Différentes Espèces de Jours. — Jour moyen.

On appelle Jour Vrai l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages du Soleil au méridien.

Il suit de cette définition que les Jours vrais ne sont pas égaux entre eux, et qu'il n'est pas possible par conséquent de les prendre pour Unité. — En effet, pour qu'ils fussent égaux, il faudrait que l'oscillation du Soleil consistât de quantités égales en des temps égaux, ou, en d'autres termes, que la projection du Soleil sur l'équateur ait un mouvement uniforme. Mais il y a deux raisons qui s'y opposent. — 1.° C'est

Voici maintenant la définition que les astronomes ont adoptée pour le jour moyen.

Considérons un premier Soleil fictif qui part du Périgée au même temps que le Soleil vrai, et qui suivrait l'écliptique uniformément dans l'espace d'une année tropique (ne serait-ce pas l'année anomalistique? voy.). Considérons ensuite un second Soleil fictif qui se trouverait à l'équinoxe des printemps au même temps que le précédent, et qui suivrait l'équateur uniformément dans le même intervalle de temps. Second Soleil fictif et ce qu'on appelle le Soleil moyen, et l'intervalle de deux passages du \odot moyen au méridien est appelé jour moyen.

Il est facile de déterminer le rapport du jour moyen au jour sidéral. En effet, appelons S la durée du jour sidéral, et m la durée du jour moyen, toutes les deux étant exprimées au moyen d'une unité de temps quelconque. Soit A la durée de l'année tropique en jours sidéraux. alors

$$A = 366,242264 \cdot S.$$

Pendant l'année tropique, la longitude du Soleil augmente de 360° ou de 2π . Donc dans le temps 1, elle aura seulement crû de $\frac{2\pi}{A}$, et dans un jour moyen, de $\frac{2\pi m}{A}$. De là il suit que si, au commencement d'un jour moyen, le Soleil coïncidait avec une certaine étoile, à la fin de ce jour, il ne coïncidera plus avec cette étoile, et aura avec elle une différence de longitude qui sera précisément $\frac{2\pi m}{A}$. Donc, quand le Soleil revient au même lieu, l'étoile s'en sera déjà séparée de $\frac{2\pi m}{A}$. Or, combien de temps a-t-il fallu pour cela? — L'étoile décrit 2π en un jour sidéral S . Elle décrit l'angle 1 en $\frac{S}{2\pi}$, et l'angle $\frac{2\pi m}{A}$ dans le temps $\frac{mS}{A}$. Donc le jour moyen se compose d'un jour sidéral + $\frac{mS}{A}$, et l'on a l'équation

$$m = S + \frac{mS}{A}$$

$$m = \frac{AS}{A-S} = \frac{\frac{A}{S}}{\frac{A}{S}-1} S. \quad A = 366,242264 S$$

Donc uniquement

$$m = \frac{366,242264}{365,242264} \cdot S$$

et réciproquement

$$S = \frac{365,242264}{366,242264} m.$$

Si l'on prend le jour moyen pour unité, de sorte que

$$m = 86400''$$

on trouve en faisant le calcul

$$S = 86162''$$

et les heures, minutes, secondes, doivent être considérées comme divisions du jour moyen.

$$m - S = 236'' = 3'56''$$

Si l'on veut avoir l'expression de l'année en jours moyens, il suffit, si l'on pose de S , dans l'expression

$$A = 366,242264 \cdot S$$

de mettre sa valeur en fonction de m . alors

$$A = 365,242264 \cdot m.$$

elle est inférieure d'une unité à l'expression de l'année en jours sidéraux.

Les astronomes prennent le jour moyen pour unité de temps. Ils l'ont divisé en 24^h, chaque heure en 60^m, et chaque minute en 60^s.

on peut d'après les formules qui précèdent chercher la durée du jour sidéral au moyen de ces unités, et l'on trouve que le jour sidéral est composé de 23^h 56^m 4^s, ou 86164^s: on d'autres termes, le jour sidéral est égale au jour moyen diminué de 3^m 56^s ou de 236^s.

on trouve ainsi que l'année tropique se compose de 365^j 5^h 48^m 51^s. C'est à l'année tropique moyenne, en considérant seulement l'équinoxe moyen car nous nous en que ce point équinoxial se déplace par l'abaissement de la précession, et par les causes de nutation; et nous entendons par là même moyen le point fictif qu'il occuperait si les nutations n'avaient pas, et si l'axe de la terre décrirait tout simplement un cône autour de celui de l'écliptique.

Il est facile de trouver la durée des autres années que nous avons dites. On a pour l'année sidérale 365^j 5^h 48^m 51^s.

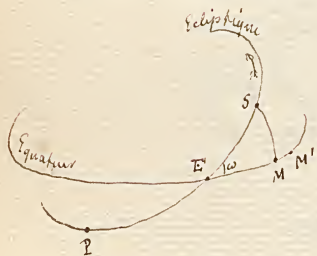
Il est facile de trouver aussi le mouvement angulaire moyen de \odot , que nous avons désigné par n .

$$n = \frac{2\pi}{T} = \frac{360^\circ}{365^j 5^h 48^m 51^s} = 0^\circ 59' 8'' \cdot 3.$$

Il suffit d'ajouter le jour moyen. — n correspondrait évidemment avec l'unité.

Méridien. — Méridien moyen.

L'intervalle de temps qui s'écoule entre les deux s'appelle l'équation du temps. Il est facile de la calculer pour chaque jour.



$$EP = \omega$$

$$EM = \varphi$$

$$ES = \theta$$

Figurons sur la sphère céleste l'écliptique, l'équateur, et l'équinoxe du printemps. Soit P le pôle. Soit ω l'arc EP qui est connu: car c'est 360° — longitude du pôle, la longitude se comptant dans le sens du mouvement de \odot .

Considérons le \odot en S à une époque quelconque t , que le jour compte à partir du passage du \odot au pôle. Si nous menons par le point S l'arc de grand cercle SM perp. à l'équateur, EM sera l'ascension droite du \odot pour ce jour-là: j'appelle φ : et PS sera la longitude à partir du pôle, que je désignerai par θ . — Il est facile de calculer θ pour l'époque t : car on a

$$\text{Tg } \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \text{Tg } \frac{n}{2}$$

l'angle n étant donné par l'équation

$$n - e \sin n = nt$$

ayant θ , on en déduit α , et l'on obtient SE . ayant SE , j'en déduis α . Car le triangle rectangle ESM donne

$$\text{Tg } EM = \text{Tg } ES \cdot \cos \omega$$

$$\text{Tg } \varphi = \text{Tg } (\theta - \alpha) \cos \omega.$$

ainsi φ est une fonction connue de t . C'est l'AR du O vrai à l'époque t .
 D'un autre côté, il n'est pas difficile d'avoir l'AR du O moyen. Soit
 M' pour la même époque t la position du O fictif sur l'équateur. Soit
 $EM' = \varphi_1$. — observons que le premier Soleil fictif est parti du Vénus
 au même temps que le O vrai, et s'est mis à tourner à quelle époque il est
 arrivé à l'équinoxe E. Puisque son mouvement est uniforme, pour Aténir
 L, cet arc implique un temps t' donné par la proportion

$$t' : T :: a : 2\pi$$

$$t' = \frac{aT}{2\pi} = \frac{a}{n}$$

Ainsi, au moment où il passe à l'équinoxe, le Soleil moyen en part
 aussi pour traverser l'équateur, et il le parcourt pendant un temps
 $t - \frac{a}{n}$. Par conséquent, il Aténira un arc $EM' = n(t - \frac{a}{n})$. Donc

$$\varphi_1 = nt - a$$

Ainsi, soit τ l'heure du premier passage du Soleil moyen au
 méridien après son passage à l'équinoxe. Pour $t = \tau$, j'ai midi moyen.
 Maintenant, faites $t = \tau + 1$, $t = \tau + 2$, $t = \tau + 3$, etc. et de temps pour
 le jour moyen, vous aurez les époques des midis moyens successifs dans
 le courant de l'année, et, en calculant pour ces époques les valeurs
 de φ et de φ_1 , vous aurez pour chaque jour de l'année l'AR du
 O vrai et celle du O moyen, et par conséquent MM' qui est la différence.
 Si vous Aténir cette différence en temps à raison de 15° pour une
 heure sidérale, vous aurez l'équation du temps.

Par cette méthode, qui est celle des astronomes, on trouve que le
 temps moyen avance sur le temps vrai du 24th juv. au 14th avril;
 de retard du 1^{er} avril au 1^{er} juin, avance de nouveau jusqu'au
 1^{er} juv., et enfin retarde jusqu'au 24th juv. L'époque du retard
 maximum est le 24th novembre, où il est de $16' 16'' 2$. L'avance maxi-
 ma est de $14' 32'' 4$, au 11 février. — Une horloge bien réglée n'est
 donc d'accord avec le O que 2 jours par an, et la différence peut
 aller jusqu'à $\frac{1}{4}$ d'heure.

Gnomon.
 Cadran Solaire.

année civile. — Calendrier.

on a distingué jusqu'ici plusieurs sortes d'années. on emploie encore
 l'année civile, qui doit satisfaire à ces deux conditions :

- 1^o. Ne contenir qu'un nombre entier de jours.
- 2^o. avoir une durée variable telle que, si l'on embrasse un grand intervalle

De temps, la moyenne des années civiles soit égale à l'année tropique.

C'est en effet sur l'année tropique qu'il est utile de régler l'année civile. Car le partage des saisons dépend du passage du \odot à l'équinoxe, et il faut qu'une même époque de l'année répondre toujours aux mêmes saisons.

L'ensemble des règles qui se servent à fixer l'année civile forme ce qu'on appelle le Calendrier.

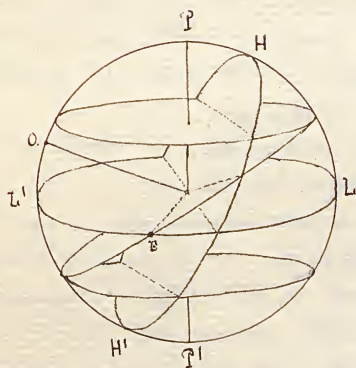
A mesure que l'Astronomie s'est perfectionnée, il en a été de même du Calendrier.

Egyptien. - année vague de 365 jours. - 1260 ans.

Calendrier Julien.

Réforme Grégorienne. (voyez.)

Vous allez Examiner comment, par la seule marche du \odot , la chaleur de la lumière se distribue sur la surface de la Terre, et comment il en résulte les différences dans la longueur de jour et de nuit et dans la périodicité des saisons.



Soit la sphère céleste, PP' la ligne des pôles, PP' l'équateur. - Considérons un observateur placé sur l'équateur terrestre, comme la Terre n'est qu'une goutte par rapport aux dimensions de la sphère céleste, on peut dire que le plan de l'horizon est parallèle au plan passant par PP' . Or dans un jour, le Soleil décrit un parallèle qui est tantôt au Sud, tantôt au Nord: par conséquent, le plan de l'horizon qui passe par PP' le divise en deux parties égales, et, pour l'observateur, le jour sera égal à la nuit: c.à.d. que le temps pendant lequel le Soleil sera au-dessus de l'horizon sera égal au temps pendant lequel il est

au-dessous. - Si l'observateur s'éloigne de l'équateur, le plan d'horizon n'est plus parallèle à PP' , et si nous imaginons qu'on le prolonge jusqu'à la sphère céleste, HH' sera sa trace sur cette sphère. - Lorsque le Soleil décrit l'équateur, ce qui arrivera une fois l'année, HH' divisera en deux parties égales le grand cercle décrit par le Soleil dans l'espace d'un jour, et, à cette époque, le jour sera égal à la nuit. Car pour les autres époques, il n'en sera pas de même, puisque le plan de l'horizon divisera en deux parties inégales les parallèles décrits par le Soleil. - Il est facile de voir qu'à l'époque de l'équinoxe du printemps, le jour sera plus long que la nuit, et ira en augmentant jusqu'à un solstice d'été. Le Soleil après avoir dépassé le solstice, redescend en plan horizontal au-dessus de l'horizon, et le jour redvient égal à la nuit quand le Soleil arrive à l'équinoxe d'automne: alors le Soleil passe de l'autre côté de l'équateur, la partie du parallèle décrit par le Soleil qui est au-dessus de l'horizon diminue jusqu'à un solstice d'hiver, et augmente ensuite jusqu'à l'équinoxe du printemps.

Différence des Tropiques du Cancer et du Capricorne.

Nous nous supposons que HH' est à l'horizon de l'observateur, comprend sous les parallèles que le Soleil décrit dans le cours d'une année. Mais cela n'a pas nécessairement lieu. — on sait en effet que le Soleil ne l'est que à $23^{\circ} 28'$ au-dessus du plan de l'équateur. Si donc un observateur est placé de telle façon que son horizon fasse avec le plan de l'équateur un angle moindre que $23^{\circ} 28'$, le Soleil sera au-dessus du point H' , il restera constamment visible pour l'observateur, au contraire, quand il sera encore au-dessus du point H , il ne le sera plus du tout; en sorte que, en ce point de la Terre, on aura pendant une certaine époque de l'année d'abord des jours égaux aux nuits, puis des jours croissant indéfiniment jusqu'à devenir égaux à 24 h.; les nuits décroissant, puis s'annulant, et il en aura une nuit complète; puis l'absence du jour de durée finie, etc.

Pour que le phénomène s'observe, il faut qu'on soit à une distance du Pôle inférieure à $23^{\circ} 28'$. Les points pour lesquels $90^{\circ} - \lambda = 23^{\circ} 28'$ sont situés sur un petit cercle que l'on appelle Cercle Polaire arctique. Tous les points de ce petit cercle ont un jour de 24 h. et une nuit de 24 h. par an. Les points situés plus au N. observent ce que nous venons d'écrire tout à l'heure. Enfin, au pôle lui-même, on a 6 mois de jour et 6 mois de nuit.

Dans l'autre hémisphère, on a le Cercle Polaire antarctique.

Problème.

Déterminer la durée du jour pour une latitude donnée, et à une époque donnée.

Soit P le pôle, HH' l'horizon de l'observateur, dont le zénith est en Z , FG le parallèle décrit par le \odot à l'époque quelconque considérée. on a

$$FP = 90^{\circ} - \delta$$

Si tout le Soleil est au-dessus de l'horizon, l'appareil est connu. — Désignons par t le temps compté à partir de midi, en prenant le jour pour positif, et exprimons la distance zénithale z du \odot à un moment quel. du jour. t est exprimé en fraction de jour.

Soit S la position du \odot . Menons l'arc de grand cercle SZ . L'angle $SPZ = 2\pi t$, et le triangle sphérique ZPS donne

$$\cos ZS = \cos ZP \cos PS + \sin ZP \sin PS \cos ZPS$$

$$\text{or } ZS = PS = 90^{\circ} - \delta. \quad ZP = 90^{\circ} - \lambda. \quad \text{Donc}$$

$$\cos Z = \sin \lambda \sin \delta + \cos \lambda \cos \delta \cos 2\pi t$$

En faisant $t = 1^h$, $t = 2^h$, ... on aura la distance zénithale du \odot à un moment quel. du jour. — Pour avoir la durée du jour, il faut faire $z = 90^{\circ}$, et l'on a

$$\cos 2\pi t = - \frac{\sin \lambda \sin \delta}{\cos \lambda \cos \delta} = - \tan \lambda \tan \delta$$

ce qui donne 11 heures t du lever du \odot , et par suite celle du lever. 24 sera la durée du jour, et $1 - 2t$ celle de la nuit pour l'époque donnée.

on ne veut aussi la durée du crépuscule. - Nous avons vu en effet que les rayons du \odot nous paraissent tant qu'il n'est pas à plus de 18° au-dessus de l'horizon. Il faut donc faire dans cette formule $2 = 90 + 18$ et l'on aura la durée du crépuscule et celle de l'aurore. - Si la somme de ces deux durées est égale ou supérieure à celle de la nuit, le crépuscule rejoint l'aurore, et il n'y a pas de nuit à proprement parler. Cela a lieu à Paris, et il est facile de voir en quels lieux cela arrive. - Supposons que le parallèle FG soit celui du Solstice, on peut alors avoir calculé l'arc HB dont le Soleil s'abaisse au-dessus de l'horizon. on a

$$HB = 90^\circ - \lambda - \omega$$

Soit alors $GE = \omega$. Et si BH est $< 18^\circ$, il n'y a pas de nuit proprement dite. Cela donne

$$90^\circ - \lambda - \omega < 18^\circ$$

$$\lambda > 90^\circ - 18^\circ - \omega$$

$$\lambda > 48^\circ \frac{1}{2}$$

En effet, à Paris, λ est un peu plus grand que $48^\circ \frac{1}{2}$. Cette circonstance se présente une fois dans les points de la terre dont la latitude est plus grande que cette limite, environs $48^\circ \frac{1}{2}$.

au lieu de supposer que le \odot nous paraît au-dessus de l'horizon, j'ai plus naturellement supposé que celle-ci comme au-dessus du \odot , et quand nous considérons les planètes, nous verrons que c'est indubitable.

Explication des saisons dans cette hypothèse.

(Lamot, p. 231 et suiv. et autres).

Mais voyons seulement que les quatre saisons n'ont pas même durée. Car les arcs du \odot élevés sont différents. actuellement, on a

$$\text{Printemps} + \text{Eté} = \text{automne} + \text{hiver} + 8 \text{ jours.}$$

Mais cette inégalité n'a lieu que pour l'époque présente. Comme la ligne des apsides se déplace de $61''$ par an, cette différence pourra devenir nulle, et même négative. on a calculé que dans 2645 ans, on aura

$$\text{Print.} + \text{Eté} = \text{aut.} + \text{hiver.}$$

Cette différence entre les durées des saisons chaudes et des saisons froides est probablement une des causes de la différence de température moyenne entre les deux hémisphères. - En outre, il y a l'inégalité d'élévation des continents et des mers.

Signes du zodiaque.

Intérêt des signes et des constellations correspondants.

Nous avons jusqu'à présent déterminé la nature de la marée élevée par le \odot (en admettant toujours l'hypothèse de Newton). Nous allons en évaluer les hauteurs réelles.

Pour cela, il faut déterminer la parallèle géométrale du Soleil. Car on sait que $P = \frac{r}{2}$ et $D = \frac{r}{P}$ (r = rayon terrestre).

de méridien que nous avons indiquée pour trouver les parallèles n'est pas avec une grande exactitude. On se sert des passages de Vénus sur la ligne du O. on a trouvé ainsi $8''{,}6$ pour la parallèle moyenne, et pour conséquent

$$D = 24025'' \text{ r.}$$

on voit qu'une erreur sur la parallèle entraîne une grande différence dans les résultats. Ainsi une erreur de $1/10$ de seconde équivaut à $1/80$ de la parallèle, et pour ainsi dire de 300 Angles terrestres.

C'est là le grand axe d'une ellipse elliptique. On voit d'ailleurs d'expérience que on en déduit aisément la distance de la Terre au centre de l'ellipse.

$$CT = 404'' \text{ r.}$$

Maintenant, on peut avoir le diam. du O. — Il est de $112''$ r.
Le rapport des surfaces est 12000 et celui des volumes 140000.

Voilà enfin ce que l'observation de la surface du O va nous apprendre sur sa constitution.

Taches : — Zone de $60'$ de largeur.

Sonnettes.

Lucules (petites pointillés).

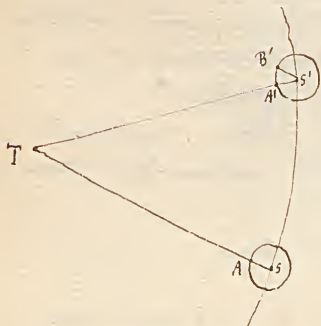
Les taches ne restent pas immobiles, et, indépendamment des déplacements qui leur sont propres, elles ont un mouvement commun qui indique que le Soleil tourne sur lui-même autour d'un axe incliné un peu sur l'écliptique. Cette rotation se fait dans le sens même du mouvement du O autour de la Terre, c.àd. de droite à gauche, de sorte que les taches visibles se meuvent de notre gauche à notre droite.

Si l'axe de rotation du O était exactement perp. à l'écliptique, chaque tache nous paraîtrait d'abord une ligne droite parallèle à l'écliptique. Mais il n'en est pas ainsi. Si l'on envisageait pour une fois la configuration d'une tache, on ne verrait pas une droite, mais une courbe ovale. Elle ne serait droite qu'à deux époques de l'année, lorsque la trace de l'équateur solaire sur le plan de l'écliptique vient passer par le centre de la Terre. alors l'inclinaison de cette droite sur le plan de l'écliptique serait précisément celle de l'équateur solaire sur l'écliptique. Elle est égale à $70^{\circ} 30'$, et par suite, l'axe de rotation du O fait avec l'écliptique un angle de $82^{\circ} 30'$. — Les époques auxquelles les taches paraissent des droites sont deux, lorsque la longitude du O est de $80^{\circ} 7'$ (11 juin) et de $260^{\circ} 7'$ (12 décembre). — Plus tard, ces époques seront différentes, à cause de la précession des équinoxes.

Les résultats ne permettent de conclure que d'un ensemble d'observations faites sur un grand nombre de taches, puisque chacune disparaît graduellement en se dissolvant, et qu'on ne la peut suivre plus de six semaines.

Nous avons à parler maintenant de la durée de la rotation.

Une tache, en moyenne, vient reprendre la même position au bout de 27j, 3. - Mais ce n'est pas là au juste la durée de la révolution du \odot . En effet, la Terre a tourné en même temps que le Soleil. - C'est pour plus de simplicité le système de Ptolémée, T la Terre fixe, S et S' deux positions du \odot pour lesquelles une tache A a le même aspect en A et en A' . Si l'on mène $S'B'$ parallèle à SA , le Soleil a décrit $2\pi + A'B'$. or



$B'S'A' = STS' =$ arc mesuré. De l'longitude du \odot et comme, dans l'hypothèse de Copernic $T = 365^j, 242264$ la longitude du \odot augmente de 2π , dans un jour, elle augmente de $\frac{2\pi}{T}$, et dans 27j, 3, de $\frac{2\pi \cdot 27,3}{T}$. Donc le Soleil a tourné de

$$2\pi \left\{ 1 + \frac{27,3}{T} \right\}$$

Donc, pour qu'il revienne de 2π , il faut

$$\frac{27,3}{1 + \frac{27,3}{T}} = 25^j, 4$$

Celle est donc la durée d'une révolution du \odot sur lui-même.

Constitution physique.

Hypothèse de Herschel.

Polynôme d'Arago (trist.)

Lumière radiante (W.)

De la Lune.

Comme pour le Soleil, on peut déterminer Jour pour Jour l' α et la δ de la Lune.

Cette détermination exige cependant quelques particularités particulières parce que nous ne voyons jamais qu'une partie du disque de la Lune.

Il faut mesurer d'abord le diamètre apparent de cet astre, ce qui est possible, puisque la portion du disque de la Lune qui est visible comprend toujours une demi-circconférence. — on peut donc toujours tracer dans la partie visible de l'astre un diamètre qui y soit compris tout entier, et c'est la grandeur de ce diamètre qu'il faut mesurer. on y parvient à l'aide d'un micromètre formé de deux fils parallèles qu'on peut rapprocher à volonté, jusqu'à ce que le diam. soit compris entre ces deux fils. Pour déterminer l'angle correspondant, il suffit d'examiner combien de temps une étoile met à passer d'un fil à l'autre, et de diviser le temps en degrés à raison de 1^s à 11^s heures.

Dans l'ouvrage plus tard sur la valeur variable de ce diamètre.

Connaissant les α et l' α de la Lune, on en connaît sa Longitude et sa latitude, et l'on découvrirait qu'elles varient comme celles du Soleil, mais beaucoup plus rapidement. ainsi la longitude augmente chaque jour de 13^o environ, par conséquent, au bout d'un nombre de jours assez petit, la lune aura repris la même position que d'abord, mais éliminée.

(Rem. si la lune paraît aujourd'hui au méridien en même temps qu'une étoile, demain elle y passera $50'$ plus tard).

C'est le nombre de jours qui est la durée de la révolution tropique de la lune. — Elle est de

$$\frac{360^o}{13^o 10'} = 27^{\text{jours}}, 321255 = 27^{\text{d}} 7^{\text{h}} 41^{\text{m}} 4^{\text{s}}, 7$$

Cette durée ne se rapporte qu'à l'époque actuelle. Elle variera dans les siècles à venir.

Quant à la latitude de la lune, on la voit aussi varier. Elle est boréale pendant une demi-révolution, et australe pendant la suite.

En construisant sur un globe ces diverses positions que la lune occupe sur l'écliptique, on trouve qu'elles sont sur un grand cercle dont l'inclinaison sur l'écliptique est $5^o 8' 48''$ et l'on comprend tout de suite alors pourquoi la latitude moyenne de la lune.

L'intersection de ce grand cercle avec l'écliptique produit deux points de ligne des nœuds, et l'on indique le Nœud ascendant et le Nœud

Descendant le premier par le signe η , le 2^e par ν .

on trouve la position des nœuds de la lune en déterminant la longitude et la latitude de la lune dans le voisinage de ces points, un peu avant, lorsque la latitude est australe, et un peu après lorsqu'elle est boréale. - Soient λ et ℓ la lat. et la longitude de A, λ' et ℓ' celles de B. Les deux triangles ANA' , BNB' donnent

$$\lambda, \lambda' :: \ell, -\ell : \ell' - \ell,$$

ℓ , désignant la longitude du Nœud N. Soit donc ℓ , qui est la longitude du Nœud ascendant.

L'inclinaison de l'orbite se déduit des mêmes observations. Car, dans le triangle ANA' , on a

$$\tan \gamma = \frac{\lambda}{\ell - \ell'}$$

on ne peut admettre qu'en se bornant à une approximation on en tire que la lune décrit un grand cercle incliné sur l'écliptique. Car si l'on détermine la longitude du Nœud ascendant et celle du nœud descendant, on ne trouve pas que ces longitudes diffèrent de 180° . La différence est inférieure à 180° . - Cela peut s'expliquer en admettant que la lune décrit une orbite plane dont le plan se déplace, en sorte que les nœuds aillent en rétrogradant. Cette rétrogradation des nœuds est assez rapide, puisque, dans une année, la longitude du Nœud ascendant a diminué de $19^\circ 19' 23''$. Par conséquent, ils feront une révolution complète en 18 ans $\frac{1}{2}$.

En même temps que les nœuds s'avancent, l'inclinaison du plan de l'orbite s'augmente également, et peut varier de 9° en plus et en moins.

De plus, le mouvement de la lune dans son orbite n'est pas uniforme.

La lune ayant un mouvement propre bien plus rapide que celui du soleil, on le trouve pas constamment placé de la même manière par rapport au soleil. Selon les phases de la lune, c'est les diverses apparenances qu'elle présente.

Étudions donc le

Mouvement de la lune par rapport au soleil.

La lune avance actuellement de $13^\circ 10'$ par jour sur la sphère céleste, le soleil, de $59'$. Par conséquent, la lune avance par rapport au soleil de

$$12^\circ 11'$$

et, pour qu'elle reprenne la même position en longitude par rapport au soleil, il faut une année marquée par

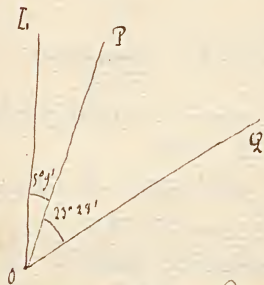
$$\frac{360^\circ}{12^\circ 11'} = 29^\circ 5' 50'' = 29^\circ 12' 44'' 35$$

c'est ce qu'on appelle révolution synodique.

Elle a une durée plus grande que celle d'une révolution tropique, et la raison en est claire, puisque le soleil marche de son côté : il faudra un temps plus long pour que la lune reprenne par rapport à cet astre la même position. - après une seconde révolution, la lune revient de soleil la même quantité de

lumière, son apparence d'état doit être la même.

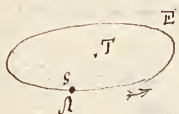
L'orbite de la lune nous offre toujours à peu près la même inclinaison sur le plan de l'écliptique: cet angle est de $5^{\circ} 9'$. Mais elle fait une élévation ou angle variable. Car si par le centre de la terre on mène trois perpendiculaires, OP à l'écliptique, OQ à l'équateur, OL à l'axe de la terre, on peut considérer OQ et OQ' comme fixes, et QOP comme invariable pendant quelque temps. Mais si l'on veut trouver de OP un cas de l'angle de $5^{\circ} 9'$ et l'angle de OL avec OQ sera maximum et minimum quand OL sera dans le plan POQ .
Le maximum = $29^{\circ} 37'$
Le minimum = $18^{\circ} 19'$



L'angle varie entre ces deux limites;

à Paris, la lune peut donc s'approcher et s'éloigner du zénith plus que le soleil. — C'est en effet que la lune est le plus près du zénith, et en hiver qu'elle en est le plus loin.

Si l'on veut avoir la durée après laquelle le monde occupe la même position par rapport au soleil, il n'y a qu'à remarquer que le monde et le soleil vont en sens contraires. — Soit E le plan de l'écliptique, S le soleil.



Supposons que le soleil et le monde aient coïncidé en S . Le soleil va marcher dans le sens de la flèche, le monde va rétrograder en sens contraire, par suite il leur faudra un certain nombre d'années pour revenir en coïncidence.

on trouve qu'il leur faut $345^d, 619$
c'est la durée d'une révolution synodique du monde.

On appelle Phases de la lune les divers aspects qu'elle nous présente selon sa position par rapport au soleil.

on dit qu'elle est en Conjonction quand sa longitude est la même que celle du soleil; en Opposition quand la différence des longitudes est 180° ; et en Quadrature quand elle est de 90° ou 270° . Quand la différence est $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}$ et $\frac{7}{4}$ de 2π , on a des positions appelées les Octants.

Les oppositions et conjonctions prennent le nom de Synggies.

Éclipses. — Pourquoi il n'y a pas toujours éclipse.

Heures du lever et du coucher de la lune à ses différentes phases.

Lumière tendrée. — Phases de la terre.

Il existe un rapport remarquable entre la révolution synodique de la lune et celle du monde.

223 Lunaisons = 19 Révolutions Synod. du monde = 18 ans 10 Jours

C'est ce qu'on calculera facilement au moyen des fractions continues.

Il en résulte qu'au bout de 19 ans, la lune reprend la même position par rapport au Soleil, et aussi par rapport à son nœud, et par suite, les éclipses suivent de reproduire dans le même ordre. Détails.

On peut encore s'apercevoir au bout de combien de temps les phases de la lune répondront aux mêmes jours de l'année. - Il suffit de trouver un nombre entier de lunaisons équivalent à un nombre entier d'années tropiques. on trouve ainsi que

$$19 \text{ années tropiques} = 235 \text{ lunaisons.}$$

Donc, au bout de 19 années tropiques, les phases répondront aux mêmes jours de l'année.

on désigne par 1 l'année qui suit celle où le 31 Décembre était jour de nouvelle lune, puis les suivantes par 2, 3, ... jusqu'à 19. L'année 20 peut être de nouveau représentée par le chiffre 1. Le nombre qui correspond ainsi à une année est le Nombre d'or.

ayant le nombre d'or d'une année, on peut calculer l'époque des Éclipses.

on appelle Époque d'une année le nombre de jours compris entre la dernière nouvelle lune de l'année précédente et le 1^{er} Janvier. - Quand le nombre d'or est 1, l'époque est 1, et dès se reproduisent au bout de 19 ans. - à chaque nombre d'or répond une époque déterminée.

Ces nombres ont en bien plus d'importance qu'ils n'en ont maintenant.

Le mouvement de la lune sert de base au Calendrier Ecclésiastique (Pape) et sert à fixer la date des fêtes mobiles.

Les variations des distances de la Terre à la lune sont nommées par le diamètre apparent, dont

$$\left. \begin{array}{l} \text{le maximum est de } 33' 30'' \\ \text{le minimum " } 29' 30'' \end{array} \right\} \odot$$

on voit que ces variations sont plus grandes que pour le Soleil, pour lequel

$$\left. \begin{array}{l} \text{le maximum est de } 32' 35", 6 \\ \text{le minimum " } 31' 31'' \end{array} \right\} \odot$$

Le diamètre apparent de la lune va en augmentant ou en diminuant dans chaque demi-révolution, et il en est de même de la distance de la lune depuis le Périgée jusqu'à l'Apogée.

Quand on se borne à une révolution, le Périgée et l'Apogée sont sensiblement sur une même droite passant par le centre de la Terre, et qu'on appelle ligne des apsides.

Si l'on veut aussi la courbe que décrit la lune, on trouve une Ellipse dont la Terre occupe un foyer, et les axes réels sont le rayon vecteur croissant proportionnellement au temps, de sorte qu'on pourrait calculer la position de la lune pour chaque instant à l'aide des formules

$$\begin{cases} nt = u - e \sin u \\ r = a(1 - e \cos u) \\ \operatorname{Tg} \frac{\varphi}{r} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{Tg} \frac{u}{2} \end{cases}$$

et l'on calcule la longitude par un calcul de trigonométrie sphérique.

L'excentricité e s'obtient comme pour le Soleil. Elle est la plus grande

$$e = 0,0635.$$

Mais si l'on embrasse plusieurs révolutions, on voit que le plan d'Alcorak se déplace continuellement, et on verra que cette ellipse n'est pas fixe. La ligne des apsidés tourne de $20''$ $40'''$ par an, en sorte qu'elle fait une révolution en

$$3232^{\text{d}}; 57$$

c'est un peu moins de 9 ans.

En rapprochant toutes ces circonstances, on peut se former une idée du mouvement de la lune.

- 1°. Rétrogradation de la ligne des nœuds, c.à.d. du plan de l'orbite;
- 2°. Inclinaison variable entre des limites assez restreintes;
- 3°. Ellipse se mouvant dans son plan.

En outre, l'ellipse n'est pas droite d'un mouvement uniforme. Il y a donc une équation du centre qui va jusqu'à $6''$, et qui dépend uniquement de la position de la terre dans son orbite.

Il y a encore une autre inégalité qui a un nom: l'évection et qui a été découverte par Ptolémée. Elle consiste en ce que, pour obtenir la longitude, après toutes les corrections précédentes, il faut encore ajouter une quantité exprimée par

$$\text{Evection} = 1^{\circ} 19' \sin \{ 2(\varpi - \odot) - \theta \}$$

les signes indiquant la différence de longitude entre la lune et le Soleil.

On voit facilement que l'évection diminue à l'équinoxe du centre. Dans les Syzygies, et l'allonge dans les quadratures. En effet, dans les Syzygies, $2(\varpi - \odot) = 0$ ou 180° , et l'évection est $-1^{\circ} 19' \sin \theta$, de sorte que l'évection est additive quand $\sin \theta$ est < 0 , et vice versa. Or, quand la terre va du Périgée à l'apogée, $\sin \theta$ est > 0 et θ est > 0 . Donc dans les Syzygies, l'évection est toujours de signe contraire à l'équation du centre. C'est le contraire dans les quadratures. En effet, on a alors $\varpi - \odot = \pm 90^{\circ}$, $2(\varpi - \odot) = \pm 180^{\circ}$. L'évection sera donc $1^{\circ} 19' \sin \theta$, et pour conséquent additive.

L'inégalité la plus considérable après celle-ci s'appelle Variation, et a été découverte par Tycho-Brahé. Elle est

$$\text{Variation} = (33' - 42'') \sin 2(\varpi - \odot)$$

on voit qu'elle est nulle aux Syzygies et aux quadratures, mais que c'est aux

savoir quel elle a son maximum.

Une nouvelle Inégalité est l'Equation annuelle. Elle a pour valeur

$$\text{Eq. annuelle} = -17' 12'' \text{ Sin (anomal. moy. du } \odot)$$

Voilà pour les Variations en Longitude.

Mais la Lune a encore des Variations en Latitude.

Le plus important d'entre les variations de l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique. Elle s'indique par

$$-9' \cos 2 (\odot - \Omega)$$

Dans toutes ces expressions, le coefficient de Sinus ou de Cosinus s'appelle le Coefficient, et l'angle, l'argument de l'inégalité.

Ces Inégalités sont d'autres périodiques, et n'appartiennent point à mouvement moyen de la Lune.

Mais il y a une autre Inégalité qui a une période tellement longue qu'elle ne paraît pas périodique, et ne paraît guère se balancer que dans 24000 ans. Elle affecte la longitude moyenne de la Lune; on trouve pour exprimer la longitude, il faut prendre la formule $a + bt + ct^2$, et si l'on prend pour unité de temps le siècle, on a $c = 10'', 2$. Il est évident que si l'on cherchoit la position de la Lune il y a 27 siècles on lui suppose le même mouvement qu'elle a actuellement, on se tromperoit de $ct^2 = 10'', 2 \times 62^2$ ou $1^\circ 46'$; et comme, pour parcourir cet arc, il faut $2^h 13^m$, si l'on cherche l'heure à laquelle a été arrivé le jour de l'éclipte il y a 27 siècles, on trouveroit qu'elle auroit eu lieu $2^h 13^m$ après l'heure à laquelle elle a eu lieu actuellement; ce qui rend bien compte de cette variation.

Elle diminue de la diminution de l'excentricité de l'orbite & de la ^{déclinaison} de la Terre qui ont aussi en diminuant pendant 24000 ans.

En même temps que le mouvement dans l'orbite s'accroît, celui du nœud se balait.

Pour avoir le diamètre de l'Elipse lunaire, il faut trouver sa Parallaxe.

On a trouvé pour le maximum $61' 22''$ et pour le minimum $53' 49''$ les parallaxes sont les parallaxes géométriques de Paris. on en conclut la distance de l'apogée et du périhélie, qui sont

$$56. r \text{ et } 63.4. r.$$

et étant le rayon moyen de la terre

$$r = \frac{40.000.000 \text{ m}}{2\pi}$$

La distance moyenne est

$$59.7. r.$$

Enfin, on donne à peu près 86000 lieues. - C'est un peu plus la moitié du rayon desolaires, en sorte que si l'on supposoit le centre desolaires coïncidant avec celui de la Terre, la Lune ne seroit qu'à la moitié de son rayon.

on peut déduire de la parallaxe et du diamètre apparent le rayon

De la lune. ... on trouve environ les $3/11$ de celui De la Terre. Donc sa surface est les $9/121$ de celle De la Terre, et son volume $1/133$ de celui De la Terre.

La lune est mieux vue De la Terre pour que son diamètre apparent varie dans le cours d'une journée. Il augmente en effet à mesure que la lune se rapproche Du Zenith. ... lorsqu'on observe à l'œil nu, on voit voir un phénomène inverse. Mais cela tient à une illusion d'optique. au Zenith, nous n'avons pas de point de comparaison, nous nous figurons la lune plus près, et par conséquent plus petite; tandis qu'à l'horizon, nous voyons un grand nombre d'objets entre nous et la lune: nous nous la figurons donc plus loin, et par conséquent, nous nous l'imaginons plus loin qu'elle n'est réellement.

on peut se servir De l'observation De la distance De la lune à une étoile pour déterminer l'heure, De Paris par ex., quand on se trouve Dans un lieu éloigné.

on trouve Dans la connaissance Des Temps la distance De la lune aux étoiles, telle qu'on la verrait Du centre De la Terre. Mais l'heure est celle De Paris. ... or, en observant cette distance au lieu donné, et la réduisant au centre De la Terre, on aura l'heure De Paris au moment De l'observation. on mesure au moyen De l'étoile la distance EL De l'étoile à la lune, en prenant le point le plus rapproché, et ajoutant le rayon apparent De la lune, comme pour le jour et cette hauteur. on mesure en outre les distances Zénithales EZ et LZ , et l'on peut en conclure l'angle Z . Mais les observations sont altérées par la réfraction, et pour s'en corriger on aura prendre $ZE + e$, $ZL + e$. — De plus, il faut tenir compte De la parallaxe De la lune, qui diminue la distance Zénithale, et qui a pour valeur $p = R \sin ZL'$. Donc il faudra prendre

$$ZE + e' - R \sin ZL' = ZL''$$

on aura ainsi les distances Zénithales telles qu'elles seraient vues Du centre De la Terre, puisque la parallaxe n'a pas d'influence sur la Dist. Zen. De l'étoile. — Les corrections faites, on aura, Dans le triangle $ZE'L''$

$$\cos E'L'' = \cos ZE' \cos ZL'' + \sin ZE' \sin ZL'' \cos Z.$$

connaissant $E'L''$, on aura par une interpolation l'heure De Paris. Supposons d'ailleurs qu'on ait observé le passage au méridien; on aura l'heure De Paris, et, en faisant la différence De ces heures, on aura la longitude.



Des Eclipses.

La Terre étant éclairée par le Soleil doit projeter une ombre coniquement à la fois à l'une & l'autre surfaces. C'est le cône extérieur qui s'étendrait vers le Soleil, tout point situé dans ce cône d'ombre et dans l'obscurité. Le rayon d'obliquité de la lune coïnciderait avec celui de l'écliptique, la lune serait plongée dans l'obscurité à toutes les approches, pourvu toutefois que la longueur de ce cône d'ombre dépasse la distance de la lune à la Terre.

Mais le plan d'obliquité de la lune ne coïncide pas avec celui de l'écliptique. Il peut que la lune soit voisine de son nœud quand que l'éclipse puisse avoir lieu.

Il faut donc avant tout déterminer la longueur du cône d'ombre. Soit V son vertex, $D = 24048 r$ la distance du soleil à la Terre, $R = 112 r$ son rayon, on trouve

$$TV = \frac{24048}{111} r = 216 r$$

et cela ne peut varier que de $\frac{1}{60}$ en plus ou en moins, puisque l'excentricité est de $\frac{1}{60}$.

or la distance de la lune à la Terre est seulement 60 r .

Si donc la latitude de la lune n'est pas trop grande, il y aura éclipse de lune.

Quand si cette éclipse peut être totale. (voir diagramme).

Imaginons que du centre de la Terre, avec un rayon égal à la distance de la lune à la Terre, on décrive une surface sphérique qui coupe le cône d'ombre suivant un petit cercle CD qu'on appelle le Cercle d'ombre.

Si ce cercle CD est plus grand que le disque de la lune, il pourra y avoir éclipse totale. Si au contraire il est plus petit, il n'y aura qu'une éclipse annulaire, les bords seuls de la lune étant éclairés par le Soleil. Mais alors aussi que cela

ne peut avoir lieu. Il suffit pour cela de comparer les diamètres apparents du cercle d'ombre de la lune, avec leur support et le même que celui des diamètres vrais.

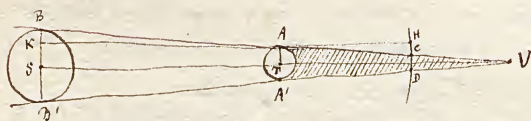
on peut regarder les lignes CD , AT , BS comme perp. aux génératrices du cône. Imaginons par le point A une parallèle à l'un des côtés, quelconque terminée aux rayons CD , SA , en H et K . Les deux triangles CHB , AKB donnent

$$CH : AH :: BK : AK.$$

$$\text{Soit } CD = 2f, \quad CH = r - f, \quad AH = D, \quad BK = R - r, \quad AK = D.$$

$$r - f : D :: R - r : D$$

$$r - f = \frac{(R - r) D}{D}$$



$$f = r - \frac{(R-r)\delta}{\delta} \quad (1)$$

Soit Δ le diamètre apparent du cercle d'ombre, Δ est la même chose que $\frac{2f}{\delta}$ d'après la définition générale du diamètre apparent. - De (1) on tire

$$\frac{f}{\delta} = \frac{r}{\delta} - \frac{R}{\delta} + \frac{r}{\delta} = \frac{\Delta}{2}$$

or $\frac{f}{\delta}$, c'est l'angle sous lequel le rayon de la terre est vu de la lune, c.à.d. la parallèle horizontale de la lune. $\frac{R}{\delta}$, c'est le demi-diam. app. rent du soleil. $\frac{r}{\delta}$, c'est l'angle sous lequel le rayon de la terre serait vu du soleil, c.à.d. la parallèle horizontale du soleil.

ainsi

$$\frac{\Delta}{2} = \text{parall. horiz. } \odot - \frac{1}{2} \text{ diam. app. } \odot + \text{Parall. horiz. } \odot$$

Cherchons maintenant le maximum de ce diamètre apparent. Pour cela il faut prendre le maximum de parall. horiz. \odot , le minimum de diam. app. \odot et le max. de parall. horiz. \odot .

$$\text{Max. de } \Delta = 2(61'24'' + 9'') - 31'31'' = 1^{\circ} 31' 35''$$

de même

$$\text{Min. de } \Delta = 2(53'49'' + 8'') - 32'36'' = 1^{\circ} 15' 16''$$

or le diamètre apparent de la lune n'est que de 30' environ, et ne varie en plus et en moins que de 2' ou 3'. - Donc il pourra y avoir éclipse totale, et, si l'orbite était dans l'écliptique, à chaque nouvelle lune, il y aurait éclipse totale.

ainsi, les éclipses sont possibles.

Elles peuvent être totales ou partielles, jamais annulaires.

Pour une nouvelle lune donnée, y aura-t-il éclipse?

Il faut que au moment de la pleine lune, la distance de la lune au centre du cercle d'ombre, c.à.d. la latitude de la lune, ne dépasse pas sensiblement la demi-somme des diamètres apparents de la lune et du cercle d'ombre. Car c'est la condition d'intersection de deux cercles. - Mais cela ne dépend pas sensiblement. Car il pourrait se faire que la latitude de la lune au moment de l'apposition ne dépassât que peu cette demi-somme, et qu'il y ait encore éclipse. En effet, comme la lune n'a pas un mouvement parallèle à l'écliptique, il pourrait se faire que, dans les moments qui précèdent ou qui suivent l'apposition, le bord de la lune entrât quelque peu le cercle d'ombre: il y aurait éclipse, mais non à l'époque de l'apposition.

Si au contraire, la latitude de la lune est moindre, il est bien certain qu'il y aura éclipse.

Examinons cette condition.

Le maximum de Δ , augmenté du maximum du diam. app. de la lune, et divisé par 2, donne

$$\frac{1}{2}(1^{\circ} 31' 35'' + 33' 30'') = 1^{\circ} 2' 32''$$

Le minimum est

$$\frac{1}{2}(1^{\circ} 15' 16'' + 29' 30'') = 52' 24''$$

Surmont les cas, cette demi-somme pourra avoir telle ou telle valeur intermédiaire entre ces deux-ci, suivant les distances relatives de

Solal, De la Terre, et De la Lune.

ainsi, pour une pleine lune donnée, vous pouvez calculer Δ et le Nomm. apparent De la lune, et prendre la Demi-Somme (ou l'une des Eléments De calcul Dans la connaissance Des Temps). on connait aussi la Latitude De la lune, et, si cette Latitude est plus grande que la Demi-Somme donnée, il ne pourra y avoir éclipse.

Si au contraire, la latitude De la lune ne dépasse pas cette limite ou ne la dépasse que très-peu, il y aura lieu de calculer les circonstances De l'éclipse.

C'est ce que nous allons faire.

Détermination Des circonstances principales D'une éclipse De lune.

on trouve Dans la connaissance Des Temps, De 3^h en 3^h. les longitudes De la lune et Du soleil. - on aura à 3^h. près l'époque De l'opposition. Pour l'interpolation, on aura l'instant précis De l'opposition.

Néanmoins pour t le temps corrigé à partir De l'époque De la connaissance Des Temps qui précède l'opposition. - Pour l'époque $t=0$, nous trouverons Dans la connaissance Des Temps le Nomm. apparent De la lune que j'appelle δ . - vous trouverons aussi les éléments nécessaires pour les calculs Du Nomm. apparent De l'ombre. - nous y verrons aussi la longitude Du O . En y ajoutant 180° , nous aurons la longitude De l'axe Du cône D'ombre, et par conséquent la longitude Du centre Du cône D'ombre. - Soit L cette longitude, et l celle De la lune. Soit λ la latitude De la lune.

Enfin, nous trouverons également le mouvement en longitude M Du O . J'entends par mouvement en longitude Du O la grandeur De l'arc de longitude Du O varié Dans l'unité De Temps. C'est aussi le mouvement en longitude Du cône D'ombre. - Soit pareillement m le mouvement en longitude De la lune, et μ son mouvement en latitude. - Les trois données se calculeront en faisant pour 3 les différences Des longitudes et latitudes De 3^h en 3^h qui se trouvent Dans la connaissance Du Temps.

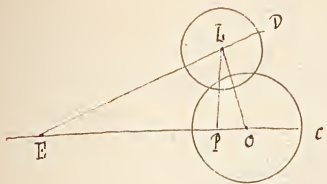
Nommions :

$t=0$	δ	, Diam. app. De la \odot
	Δ	, " Du cercle D'ombre.
	L	, longitude "
	l	, " De la.
	λ	, latitude "
	M	, mouvement en longitude Du \odot
	m	, " " De la
	μ	, " latitude "

Cela posé,

Représentons par la ligne horizontale EC l'écliptique, par ED l'axe De la lune. - à l'époque t , le cône D'ombre occupe la position O , et a son centre sur l'écliptique. - Soit I le centre De la lune.

J'appelle Z la distance IO Du Deux centres. - C'est là la quantité



la quantité qu'il faut déterminer en fonction du temps, car c'est elle qui détermine les circonstances de l'éclipsé.

Puisque L et l sont les longitudes de O et de C pour l'époque $t=0$, on aura pour l'époque t

$$\text{Long. } O = L + Mt$$

$$\text{Long. } C = l + mt$$

Donc

$$OP = L - l + (M - m)t$$

De même

$$LP = \lambda + \mu t$$

Ainsi à une époque quelconque

$$x^2 = \{L - l + (M - m)t\}^2 + (\lambda + \mu t)^2$$

Développant on a

$$x^2 = at^2 + 2bt + c$$

en posant

$$\begin{cases} a = (M - m)^2 + \mu^2 \\ -b = (L - l)(M - m) + \lambda\mu \\ c = (L - l)^2 + \lambda^2 \end{cases}$$

Cette formule fait connaître x à l'époque t . — Si l'on donne x et qu'on demande t , on en a une :

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac + az^2}}{a}$$

ou on a

$$b^2 - ac = -h^2$$

en posant

$$h = L(M - m) - \mu(L - l)$$

donc

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{az^2 - h^2}}{a}$$

on voit ici quel est le minimum de x . Car a est nécessairement > 0 :

$$x > \frac{h}{\sqrt{a}}$$

Donc, pour qu'il y ait éclipse, il faut que le minimum de x soit plus petit que la $1/2$ somme des diamètres apparents de la lune & du cercle d'ombre.

$$\frac{h}{\sqrt{a}} < \frac{\Delta + \delta}{2}$$

Pour le cas, il y aura donc éclipse, puisque la distance des centres est plus petite que la somme des rayons.

L'époque où l'éclipse est la plus complète est celle où le radical est nul

$$t_1 = -\frac{b}{a}$$

Quelle est l'époque du commencement de l'éclipse, et celle de la fin ?

L'éclipse commencera lorsque x est égal à $\frac{\Delta + \delta}{2}$. Soit donc

manière, on trouve

$$\frac{1}{2} \Delta' = \text{par. hor. } \odot + \text{parall. hor. } \odot + \frac{1}{4} \text{ diam. app. } \odot$$

on voit de 18 ans et 10 jours, la lune se retourne place de la même manière par rapport au soleil tant en longitude qu'en latitude, et nous en avons vu que les éclipses devaient se reproduire dans le même ordre.

Les tables montrent que, en 18 ans et 10 jours, il y a 29 éclipses de lune.

Pour un lieu donné, il est possible qu'il n'y ait que 20 éclipses visibles.

On peut se demander quelles circonstances ont lieu pour un habitant de la lune au moment d'une éclipse. Il y a évidemment éclipse de soleil.

Il peut se faire que pour un observateur il y ait éclipse partielle du soleil, tandis que nous n'avons pas éclipse de lune. Car si l'on imagine les points de la lune qui sont dans la pénombre, on voit qu'ils voient une partie du soleil.

Eclipses de Soleil.

Remarquons d'abord qu'une éclipse de soleil ne peut avoir lieu en même temps pour toute la terre, puisque celle-ci est plus grosse que la lune.

Une éclipse de soleil ne peut avoir lieu qu'aux Nouvelles Lunes ou Conjunctions.

Soit à ce moment S le soleil, L la lune. Imaginons le cône circonscrit à la fois au soleil et à la lune. Le prolongement de ce cône sera le cône d'ombre projeté par la lune. — La lune est plus petite que la terre, elle-ci ne peut être entièrement dans ce cône, donc il ne peut y avoir éclipse de soleil pour toute la terre.

Si nous voulons avoir les points où l'éclipse sera partielle, imaginons le cône d'ombre circonscrit intérieurement. La terre peut-elle être entièrement enfermée dans ce cône de pénombre? — Pour cela, que faut-il comme centre,

avec la distance D de la terre à la lune, décrivons une sphère, soit EE' son intersection avec le cône de pénombre. Calculons le demi-diamètre de EE'. Soit BL = r'.

Les deux triangles semblables EBH, BKC donnent

$$EH : D :: R + r' : D - D$$

$$EH = \frac{D(R+r')}{D-D}$$

$$EF = r' + \frac{D(R+r')}{D-D} = \text{d'après } r' + \frac{DR}{D} = \frac{3}{11}r + \frac{1}{400} \cdot 112r = \left(\frac{3}{11} + \frac{112}{400}\right)r = 0,88r.$$



ainsi le rayon du cercle de pénombre n'est environ que 0,57 r. Or, si il n'y a que le quart de la surface d'un hémisphère qui verra l'éclipse de Soleil en même temps. le cercle d'intersection se trouvera sur la surface de la Terre, et il n'y a que pour les points de la bande ainsi déterminée que l'éclipse sera visible.

Possibilité d'une éclipse de Soleil.

Que faut-il pour qu'il y ait une nouvelle lune. Il y ait éclipse de Soleil ? Il faut que la Terre atteigne ce cercle de pénombre.

Figurons le Soleil et la Terre, et le cercle circonscrit aux deux. Si la lune est en dehors de ce cercle, il n'y aura pas d'éclipse. — Pour que la pénombre ait lieu, il faut que la latitude de la lune ne dépasse pas une certaine limite, et, pour trouver cette limite, il faut, du centre de la Terre, tracer



un cercle EF et chercher le demi-diamètre apparent EF de ce cercle, c.à.d. l'angle FTE. En effet, pour qu'il y ait éclipse, il faut que la latitude de la lune soit plus petite que la demi-somme des diamètres apparents de la lune et du cercle EF. — Car, en supposant que l'orbite

de la lune coïncide avec le plan de l'écliptique, il faut pour qu'il y ait éclipse commencer, que la latitude de la lune soit forte égale à cette demi-somme, et l'on voit facilement qu'à cause de l'obliquité, elle doit être un peu plus petite.

Calculons donc $FTE = \frac{1}{2}$ diam. apparent du cercle de pénombre. Menons par le point B une droite BH parallèle à TS. Soit $EF = p$. On a dans les triangles semblables BER, BCH

$$p - r : R - r :: D : D$$

$$p = r + \frac{(R-r)D}{D}$$

$$\frac{p}{D} \text{ ou } FTE = \frac{r}{D} + \frac{R}{D} - \frac{r}{D}$$

$$\frac{p}{D} = \text{par. hor. } \odot + \frac{1}{2} \text{ diam. app. } \odot - \text{par. hor. } \odot$$

appelons ce diam. apparent Δ , alors

$$\frac{\Delta}{2} = \text{par. hor. } \odot + \frac{1}{2} \text{ diam. app. } \odot - \text{par. hor. } \odot$$

ainsi il faut que

$$\lambda < \frac{\Delta + r}{2}$$

Si cela a lieu, il y aura éclipse pour quelques points de la Terre.

Si la latitude est à peu près égale à $\frac{\Delta + r}{2}$, il pourra y avoir éclipse, mais ce ne sera pas exactement au moment de la conjonction.

ainsi, on pourra prédire si, au moment d'une nouvelle lune, il y aura éclipse de Soleil.

Pour le Août, nous remarquerons seulement qu'une éclipse de Soleil peut être totale, tantôt annulaire. — Cela dépend de la comparaison des diam. apparents du Soleil et de la lune. — Les limites entre lesquelles varient les diamètres apparents de la lune sont plus grandes que celles entre lesquelles varient ceux du Soleil. — Il peut donc arriver

que le diamètre de la lune soit le plus petit: alors, l'éclipse est annulaire, ou qu'il soit plus grand, alors l'éclipse sera totale.

Pour deux points de la Terre, une même éclipse peut être annulaire et totale. En effet, si l'on s'éloigne de la lune à la surface de la Terre, le diam. apparent de la lune décroît plus vite que celui du Soleil.

Les limites entre lesquelles une éclipse de Soleil est possible sont, relativement à la latitude de la lune, beaucoup plus grandes que celles où une éclipse de lune est possible. — En prenant les moyennes, on les trouve dans le rapport de 89° à 57° .

Les tables montrent qu'en 18 ans 10 jours, il y a 41 éclipses de Soleil. — Mais, pour un point de la Terre, les éclipses de Soleil sont moins souvent visibles que celles de la lune, puisqu'une éclipse de Soleil n'est visible que d'une petite portion de la Terre.

En réalité, bien que les éclipses de Soleil soient plus fréquentes que les éclipses de lune, elles sont moins souvent visibles pour un point donné de la Terre.

Une éclipse totale de Soleil est aussi bien ^{moins} fréquente qu'une éclipse totale de Sol. Lune. — En effet, pour qu'une éclipse de Soleil soit totale, il faut que son centre et celui de la lune soient situés sensiblement sur la droite passant de l'œil d'un observateur de la Terre, tandis que le cercle d'ombre dans lequel pénètre la lune lors d'une éclipse totale de lune a un rayon à peu près triple de celui de la lune.

Pour une éclipse annulaire et totale, leur possibilité est la même, puisqu'il suffit, dans le cas où les deux centres sont concentriques, que le diam. de la lune soit plus petit ou plus grand que le diamètre du Soleil, et que, pendant une moitié de l'année, le diam. de la lune est le plus petit, et que pendant l'autre moitié, il est le plus grand.

Mouvement de la lune sur elle-même.

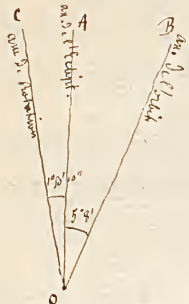
Les observations montrent que la lune tourne toujours la même face vers la Terre.

Il résulte de là que la lune tourne sur elle-même dans le même temps que dure sa révolution sidérale.

(Chaptes, p. 384).

En déterminant avec précision la situation de points remarquables de l'astre par rapport au centre, on peut déterminer l'équateur lunaire, c.à.d. le plan perpendiculaire à l'axe de rotation. — on a remarqué que le plan de l'équateur lunaire, le plan de son orbite et le plan de l'écliptique sont tellement placés que les intersections de l'un d'eux avec les deux autres sont deux droites parallèles, ce qui revient à dire que si, pour un même point de l'espace, on mène trois plans parallèles.

parallèles à ceux-ci, ils se coupent formant une même droite : — un plan
même, que si par un même point de l'espace, on mène trois droites
perpendiculaires à ces plans, elles seront dans un même
plan, et perpendiculaires à l'intersection de ces plans.



Bien que la Lune nous présente toujours la même face,
cependant, vers les bords du disque, il y a des points qui
se cachent et réapparaissent ensuite. Ce phénomène qu'on appelle
libration, et il est facile d'en rendre compte.

Plutôt, l'axe de rotation de la Lune n'est pas exactement perpendiculaire
au plan de l'écliptique. Il s'incline que si, à une certaine époque,
cet axe est dans le plan perp. à l'orbite de la Lune passant par la Terre, la
partie visible de la Lune renfermera une des extrémités de cet axe qui se tourne
vers le Nord, et l'on verra même un peu au-delà de cet axe un petit
cercle de la Lune. en bout de sa révolution sidérale, la Lune sera venue
à l'autre bout de l'axe; alors ce sera l'autre extrémité de l'axe qui sera
visible de la Terre. — Si donc d. époque per. de la Lune, on se voit un axe égal
à $6^{\circ} 39'$ on verra un petit cercle, les points de la Lune seront tantôt
visibles, tantôt invisibles. — C'est ce qui forme la libration en latitude.

Il y a encore un autre genre de libration qui consiste en ce que certaines
portions du disque restent à droite ou à gauche du centre de l'appareil.
Il est facile d'en rendre compte (Séverin). C'est la libration en longitude.

La hauteur des montagnes a permis de voir sur la Lune des montagnes
de forme volcanique. — on a pu déterminer leur hauteur par l'ombre
qu'elles projettent. Elles sont jusqu'à 2400 m.

En outre, on observe des dépressions considérables. on les avait prises pour
des mers. Mais, on y regardant de près, on voit qu'il n'en est rien. — La
Lune d'ailleurs n'a pas d'atmosphère, et, s'il y avait des mers, il y aurait
probablement une atmosphère.

L'absence d'atmosphère est démontrée par plusieurs phénomènes... comme
les éclipses en effet, la lumière est brusquement éteinte, — de plus les rayons
luminaires venant des étoiles et passant près de la Lune ne sont
pas réfractés.

Des Planètes.

Les planètes se distinguent des étoiles en ce qu'elles ont un mouvement propre.

En outre, elles ont un diam. apparent dans les lunettes.

Leur lum. lumineuse, à l'exception de Vénus, n'est pas scintillante.

Il y a aussi d'autres astres qui ont un mouvement apparent. Ce sont les comètes. Mais, outre d'autres particularités, leurs orbites sont des ellipses très-allongées, tandis que les orbites des planètes le sont des ellipses dont l'excentricité est très-petite.

Noms des Planètes.

Petites planètes. - aujourd'hui (20 Mars 1854) on en connaît 29.

on connaît la longitude et la latitude d'observation de M et de la position.

Les planètes se trouvent sur l'écliptique, et restent dans un band de 18° dont l'écliptique est le milieu, lequel on appelle le Zodiaque.

La latitude des planètes est alternativement positive et négative.

Ascendant et descendant.

Les intervalles de temps entre deux passages d'une même planète au nord sont tous égaux.

Les mouvements des planètes en longitude ne sont pas tous simples. Ils sont tantôt directs et tantôt rétrogrades, et, au moment du changement de signe, la planète s'arrête momentanément.

Cependant, quand on observe pendant longtemps, on voit que le mouvement direct l'emporte sur le mouvement inverse.

Les planètes ont aussi des Phases, qui sont surtout visibles pour Vénus. - ce qui prouve qu'elles reçoivent leur lumière du Soleil.

Explication détaillée des phases de Vénus.

Elles ont bien aussi pour Mars, qui devient visible à la conjonction inférieure.

Planètes Supérieures. - Pourquoi s'en ne voit guère leurs phases. -

Elles ne sont visibles que pour Mars: elles sont presque toutes pour Jupiter et Saturne.

Les variations de distance des Planètes à la Terre nous sont déjà indiquées par les phases, surtout pour les planètes supérieures, voici par exemple.

Conjonctions Supérieures et Inférieures.

Oppositions.

Variation du diamètre apparent. - Celui de Vénus varie de $60''$ à $10''$.

celui de Mercure, de $12''$ à $5''$, celui de Mars de $18''$ à $4''$.

on voit que l'ensemble de ces phénomènes conduit à penser que c'est surtout nature du \odot que le mouvement doit être régulier, et qu'on arrivera plutôt à des lois simples en observant le mouvement des planètes par rapport au centre du Soleil.

Mais nous ne pouvons en déterminer les longitudes et latitudes géocentriques. — Nous allons évaluer les longitudes et latitudes qu'on nomme Héliocentriques, qui auraient lieu pour des observations prises au centre du Soleil. — Si l'on imagine un grand cercle perp. au plan de l'écliptique, et passant par le Soleil et le Soleil, ce grand cercle coupe l'écliptique en un point, et la distance angulaire de ce point à l'un des équinoxes est la longitude Héliocentrique. De plus, la distance de la planète à ce point est la latitude Héliocentrique.

Si l'on y joint la distance de la planète au \odot , on aura ainsi les trois coordonnées héliocentriques qui fixent la position de la planète.

Si donc on détermine pour des époques très rapprochées ces trois coordonnées, on aura le mouvement de la planète.

La chose serait facile si l'on pouvait déterminer avec une exactitude la parallaxe héliocentrique de la planète. Car on en déduirait sur le champ la distance à la Terre.

Détermination des coordonnées héliocentriques.

Soit T la Terre, $T\gamma$ la ligne des équinoxes, le papier et le plan de l'écliptique. Soit S le Soleil. $ST\gamma = L =$ longitude \odot . — Soit P la planète.

Situe hors du plan de l'écliptique, Q sa projection sur ce plan. Je joins T et Q au centre de la Terre. L'angle QTY est la longitude géocentrique l . L'angle PTQ est la latitude géocentrique λ . Nous avons déterminé la parallaxe: donc nous connaissons la distance $PT = r$.

Il est facile avec cela de déterminer les coordonnées héliocentriques. — Soit $SP = r'$. — Menons SQ . Si nous menons par le point S une parallèle $S\gamma'$ à la ligne des équinoxes, l'angle QSY' est égal à $2\pi -$ la long. Hélioc. de P .

$$QSY' = 2\pi - l'$$

$$QSP = \lambda'$$

Il faut déterminer r' , l' , λ' . La chose est aisée.

Dans le triangle QST , on connaît l'angle $QTS = L - l$, le côté qui le comprend, $TS = R$ donné par les Tables du \odot , et $TQ = r \cos \lambda$. on connaît donc SQ , et aussi l'angle TSQ . on en conclut facilement

$$QSY' = 2\pi - l' = \pi - L - TSQ$$

$$l' = \pi + L + TSQ$$

Dans le triangle PQS , rectangle en Q , on a SQ , et par suite

et PQ qui est égal à $r \sin \lambda$. Donc

$$\cos \lambda' = \frac{r \sin \lambda}{SQ}$$

$$SP = \frac{SQ}{\cos \lambda'} = r'$$

on a donc déterminé r' , λ' , c.à.d. les coordonnées géocentriques, qui se convertissent facilement en 3 coordonnées rectangulaires.

Mais la parallèle horizontale ne peut pas être déterminée avec assez de précision pour que cette méthode soit bien bonne.

Cependant, à l'époque où la distance angulaire de la planète au Soleil est maximum, et sensiblement égale à 90° (elle le fut récemment pour Vénus) on peut déterminer r sans avoir besoin de la parallèle horizontale. — En effet, le triangle TPS étant alors rectangle, on aura

$$TP = TS \cdot \cos PTS$$

$$r = R \cos PTS$$

et l'angle PTS est observable. — Ailleurs, on peut le calculer. Car si l'on imagine l'angle solide $STPQS$ dont le sommet est en T , et le triangle sphérique correspondant, on aura

$$\cos PTS = \cos \lambda \cos (L - l)$$

Donc

$$r = R \cdot \cos \lambda \cos (L - l)$$

Mais comme l'on a en ces procédés, et nous n'avons, pour le moment, besoin de la parallèle.

Cela n'a lieu qu'à l'époque de la plus grande elongation, et comme elle arrive assez fréquemment (pour les 270 jours périodiques), on pourra à loisir marquer diverses positions de Vénus de la planète, et vérifier

1° que l'orbite est une ellipse dont le S occupe un foyer.

2° que la loi des aires s'applique.

3° que les carrés des temps des révolutions sont proportionnels aux cubes des grands axes.

Enfin, cela exigera des observations très-longues et continues.

Il y a d'autres méthodes.

admettons d'avance les lois de Kepler. — Nous allons appliquer les lois du mouvement, et nous assignerons ainsi à chaque instant la position de la planète. Il restera ensuite à vérifier par l'observation les lois supposées.

Pour chaque planète, il y a 7 éléments à déterminer.

Dans le cas de Vénus, on n'en donne que six : parce que le temps de la révolution est si au grand axe pour la 3^e loi de Kepler. — Mais ici, nous ne sommes pas en mesure d'assigner cette loi, le doute qu'en a-t-on dit venant

T (durée d'une révolution) a (grand axe) e (excentricité)

C (époque du passage au périhélie) ω (angle que le rayon vecteur du S au périhélie fait avec le grand axe) α (longitude de ce point)

γ (inclinaison de l'orbite sur le plan de l'écliptique).

Je commence par appliquer la longitude du périhélie α . — Pour cela, on observera la planète au moment précis où elle passe à son périhélie ascendant.

Soit $T\gamma$ la ligne des équinoxes, S le soleil, N la planète au moment où elle est dans le plan D l'écliptique, c.à.d. à son nœud. Menons SN jusqu'à A . Soit l'arc sinusoïdale SP' parallèle à $T\gamma$, la longitude et NSP' ou $2\pi - \alpha$ puisqu'elle se mesure dans le sens de la flèche. — Dans le triangle TNS , on connaît $R = TS$, la longit. du soleil ATS

$$ATS = L.$$

$$ATN = l$$

$$NTS = L - l.$$

Voilà maintenant quelle est la valeur de l'angle TSN . on voit que

$$TSN + ASP' \text{ ou } 2\pi - \alpha + L = \pi$$

$$TSN = \alpha - L - \pi$$

Cela posé, le triangle TSN donne la proportion

$$\frac{SN}{R} = \frac{\sin(L-l)}{\sin(\alpha - L - \pi)} = \frac{\sin(L-l)}{\sin(L-\alpha)}.$$

Il y a là deux inconnues, SN et α . — Mais, on déterminera un second passage de la planète au Nœud. α et SN resteront constants, car la planète a un mouvement révolutionnaire. Donc

$$\frac{SN}{R_1} = \frac{\sin(L_1 - l)}{\sin(L_1 - \alpha)}$$

Divisant membre à membre

$$\frac{\sin(L_1 - \alpha)}{\sin(L - \alpha)} = \frac{R_1}{R} \frac{\sin(L_1 - l)}{\sin(L - l)}$$

On élimine α : car en développant au et divisant par $\cos \alpha$, on a $\tan \alpha$.

ayant la longitude du Nœud, il nous faut déterminer l'inclinaison γ . — on choisit le moment où la longitude du soleil et géocentrique égale à la longitude héliocentrique du Nœud.

Considérons la figure pour cette circonstance. — alors la Terre se trouve sur NS prolongée : la planète est quelque part en P au-dessus ou au-dessous du plan D l'écliptique. Plaçons Q prop. sur ce plan. Plaçons I prop. sur SN , et joignons IP . L'angle en I mesure l'angle du plan D l'écliptique avec le plan D l'orbite.

Donc $\angle PIQ = \gamma$.

Joignons TP , TQ , on a l'angle trièdre $TIPQ$ qui donne

$$\angle \gamma \lambda = \angle \gamma \gamma \sin \angle ITQ$$

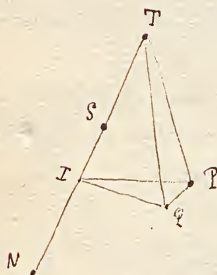
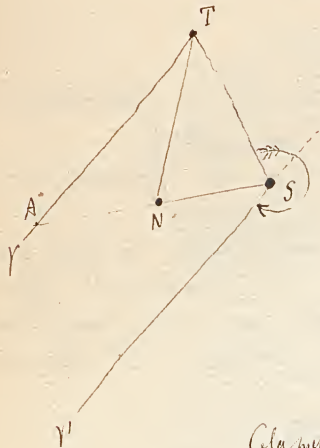
or $\angle ITQ$ est la différence de longitude

$$\angle \gamma \lambda = \angle \gamma \gamma \sin(L-l)$$

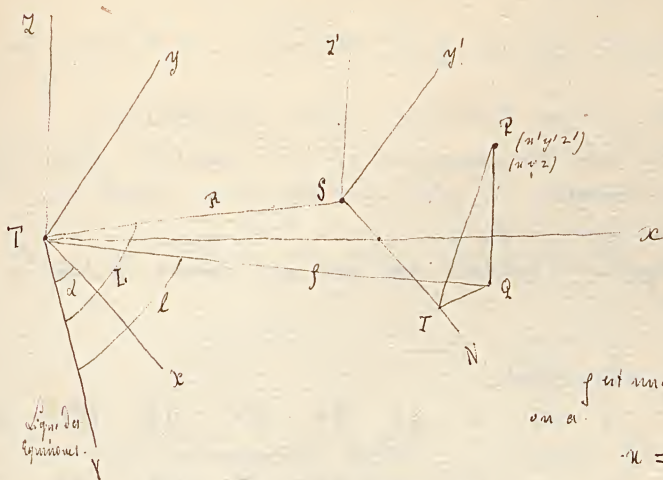
$$\angle \gamma \gamma = \frac{\angle \gamma \lambda}{\sin(L-l)}$$

Les autres données sont faciles à trouver maintenant. — Pour cela, nous allons montrer comment, à une époque quelconque, on peut déterminer les trois coordonnées héliocentriques de la planète.

Imaginons pour le centre de la Terre et dans le plan D l'écliptique



une parallèle à la ligne du Nœuds. Soit puis cette droite pour axe des x .
Abaissons-lui dans le plan de l'elliptique une perp. Ty , et une perp. imm.
comme Tz qui sera l'axe des z . — Imaginons que le point S soit une



parallèle à une. Soit, Sx', Sy', Sz' .

Soit Q une position quelconque de la planète. —

Si $TS = R$, on aura les relations

suivantes

$$x = R \cos (I - \alpha) + x'$$

$$y = R \sin (I - \alpha) + y'$$

$$z = z'$$

abaissons $PQ = z = z'$. Soit $f = TQ$.

f est une variable auxiliaire qui va de 0 à 2π .

on a

$$x = f \cos (l - \alpha)$$

$$y = f \sin (l - \alpha)$$

$$z = f \cos \lambda \quad (\lambda = PTQ)$$

Substituant dans les formules précédentes, on aura

$$x' = f \cos (l - \alpha) - R \cos (I - \alpha)$$

$$y' = f \sin (l - \alpha) - R \sin (I - \alpha)$$

$$z' = f \cos \lambda$$

or si l'on abaisse QI perp. à SN , et qu'on joigne IP , l'angle PIQ est
comme : c'est γ , et l'on a

$$z' = y' \cos \gamma$$

Si l'on élimine f dans ces équations entre x', y', z' et γ . Éliminant f , on aura x', y', z' .

Ces équations supposent qu'on a α et γ .

ayant x', y', z' , il est facile d'en déduire la distance de la
planète au Soleil.

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = SP.$$

et l'angle

$$\sin \lambda' = \frac{z'}{r'}$$

de même

$$\cos \gamma \sin I = \frac{QI}{IS} = \frac{z' \cos \gamma}{x'}$$

ainsi l'on pourra avoir à chaque instant les trois coordonnées géo-
centriques.

on ne s'agit que de la planète à lieu les positions assignées pour les
formules du mouvement elliptique.

En effet, l'équation de l'ellipse est

$$r' = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(v - \omega)}$$

Donc observations donnent r' et v . — Par suite on aura a, e, ω . — les trois
éléments sont connus, on pourra calculer r' pour une autre position
de la planète à laquelle on aura une autre valeur de v , et vérifier
si les valeurs données par l'observation sont d'accord avec

ce Résultat Du Calcul.

On a Recueilli plusieurs faits généraux sur le mouvement Des Planètes.

- 1°. Les orbites sont peu inclinées sur le plan De l'écliptique.
- 2°. Elles ont toutes Des mouvements directs semblables à celui De la Terre sur le Soleil. On observe, en effet, sur l'écliptique, la suite vers le N. les novaux Numéros De Droit à Gauche.
- 3°. Les Temps Des Révolutions sont entre eux comme les Cubes Des Grands Axes.

Loi Empirique De Bode.

0 3 6 12 24 48 96 192 384

+ 4

4 7 10 16 24 32 100 196 388

Mars Vénus Terre Mars Jupiter Sat. Uran. Nept.

Pour Neptune, l'erreur est considérable.

Il est facile maintenant De nous Rendre compte Des phénomènes que nous offre le mouvement Des Planètes tel que nous le voyons De la Terre.

Pour simplifier que la Terre ou le Soleil immobiles. — C'est cette dernière hypothèse que nous ferons.

Puis l'orbite et les vitesses De Venus et De la Terre. on peut supposer que ces vitesses sont dans une même ligne, et que le mouvement soit uniforme. — on a, d'après la 3^e loi De Kepler:

$$T^2 : T'^2 :: a^3 : a'^3$$

$$T : T' :: a^{\frac{3}{2}} : a'^{\frac{3}{2}}$$

ainsi

$$n = \frac{2\pi}{T} \quad n' = \frac{2\pi}{T'}$$

n et n' étant les vitesses angulaires De la Terre et De Venus.

$$n : n' :: a'^{\frac{3}{2}} : a^{\frac{3}{2}}$$

La vitesse absolue De la Terre est an, celle De Venus a'n' :

$$an : a'n' :: a a'^{\frac{3}{2}} : a' a^{\frac{3}{2}}$$

$$:: \sqrt{a} : \sqrt{a'}$$

or $a > a'$; donc $a'n' > an$.

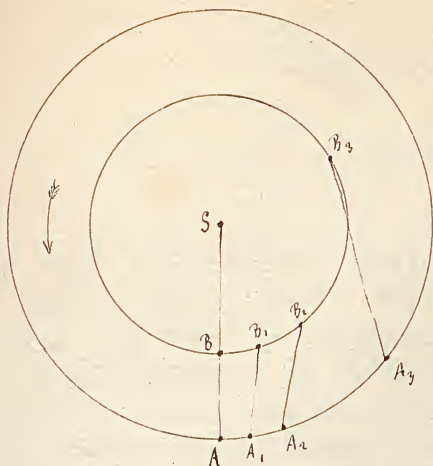
ainsi

La vitesse absolue De Venus est plus grande que celle De la Terre, et le même

La vitesse absolue D'une planète est d'autant plus grande qu'elle sera plus rapprochée Du Soleil.

et on voit De même Des vitesses angulaires.

Supposons maintenant qu'à une certaine époque, la Terre et



Venus sont en conjonction. Soit représenté par la flèche le sens commun de leur Révolution.

Quand Venus sera en B, la Terre aura parcouru un arc moindre AA₁. Pour la Terre, Venus aura paru avoir un mouvement rétrograde. Mais on voit facilement que cela ne durera pas longtemps. ainsi, il viendra un moment où le rayon qui va de la Terre à Venus sera tangent à l'orbite de Venus, et le rayon A₂B₂ pénètrera cette orbite, et aura paru traverser dans le sens direct.

Si l'on continue à tracer les rayons directs, on voit que q. q. temps après et avant la conjonction, le mouvement paraît rétrograde. Dans le reste de la Révolution synodique,

le mouvement est direct. .. à l'époque de l'élongation maximale, la planète paraît stationnaire.

On aura employé le mot Révolution synodique, parce qu'il s'applique la durée nécessaire pour que la planète et la Terre reprennent les mêmes positions relatives par rapport au Soleil.

Il est facile d'en calculer la durée.

Soit t la durée d'une Révolution synodique, T celle d'une Révolution sidérale. — la Terre aura parcouru un angle nt , et Venus son angle $n't$; et l'on doit avoir

$$n't = 2\pi + nt$$

$$t = \frac{2\pi}{n' - n} = \frac{1}{\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}}$$

Pour Venus, cette durée est de 584 Jours.

On trouve pareillement les détails sur les planètes et leurs satellites.

Voici quelques remarques pour l'usage du passage de Venus sur le disque du Soleil.

moyenne de la Terre au Soleil, $u = \frac{2\pi a}{T}$. — La vitesse de la lumière est $v = \frac{a}{\frac{1}{493''}}$. Donc $\frac{u}{v} = \frac{2\pi \cdot 493}{T}$, T étant exprimé en secondes. $\frac{u}{v}$ est le milieu du grand axe.

Si l'on veut l'exprimer en degrés, c'est

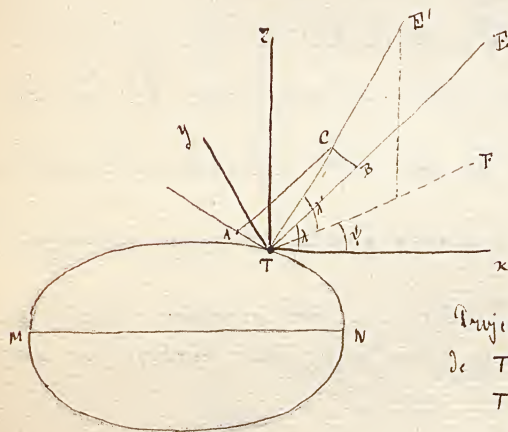
$$360^\circ \cdot \frac{493}{T} = \frac{360^\circ \cdot 493}{365,256 \cdot 240} = \frac{493^\circ}{365,256 \cdot 240} = \frac{493'}{365,256 \cdot 4} = \frac{493''}{365,256} = 20'',25.$$

ou doublant, on a $40'',5$ qui est le grand axe.

Quant au petit axe, on l'en déduira en multipliant par le sinus de la latitude.

C'est si Bradley qu'on voit la Nouvelle de l'observation et de la cause, au commencement de la première moitié du dernier siècle.

Mais allons maintenant faire le calcul rigoureux de l'observation, ce qui nous montrera que la comète décrit par la lumière apparent pendant l'année et au lieu du 2^e degré, d'être que si l'on suppose la sphère avec son plan Tangent, la comète que paraît décrire et être est une ellipse.



Projections sur	Tx	Ty	Tz
de TA ..	$u \cos q$	$u \sin q$	0
TB ..	$v \cos \lambda$	0	$v \sin \lambda$
TC ..	$u' \cos \lambda' \cos \psi$	$u' \cos \lambda' \sin \psi$	$u' \sin \lambda'$

et la projection de la diagonale est égale à la somme des projections de ses autres côtés du parallélogramme sur chacun des axes. donc

$$\begin{cases} u' \cos \lambda' \cos \psi = u \cos q + v \cos \lambda & (1) \\ u' \cos \lambda' \sin \psi = u \sin q & (2) \\ u' \sin \lambda' = v \sin \lambda & (3) \end{cases}$$

on voit de là u' , λ' , ψ . — u' est peu important; mais ψ est l'aberration en longitude, et λ' l'aberration en latitude.

Si l'on veut avoir l'équation du cône décrit par TE' , comme TE' est déterminé par λ' et ψ , il faut chercher une relation entre λ' et ψ indépendamment de u' et de q . — Pour cela, de la dernière équation, j'écris

$$u' = \frac{v \sin \lambda}{\sin \lambda'}$$

Reportant dans les autres

$$v \sin \lambda \frac{\cos \lambda' \cos \psi}{\sin \lambda'} = v \cos \lambda = u \cos q$$

$$v \sin \lambda \frac{\cos \lambda' \sin \psi}{\sin \lambda'} = u \sin q$$

Si l'on veut introduire les coordonnées Rectangulaires, on a

$$\frac{x}{\cos \lambda' \cos \psi} = \frac{y}{\sin \lambda' \sin \psi} = \frac{z}{\sin \lambda'}$$

Donc

$$v \sin \lambda \cdot \frac{x}{z} - v \cos \lambda = u \cos \varphi$$

$$v \sin \lambda \cdot \frac{y}{z} = u \sin \varphi$$

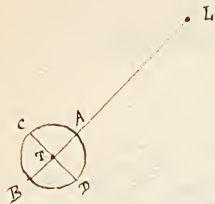
Élevant au carré et ajoutant pour éliminer φ , on a un 2^e ordre

$$v^2 \sin^2 \lambda \left(\frac{y^2}{z^2} + \frac{x^2}{z^2} \right) - 2v^2 \sin \lambda \cos \lambda \frac{x}{z} + v^2 \cos^2 \lambda = u^2$$

entre cette forme du mouvement de Rotation et de Translation de la Terre, il y en a une autre qui ne laisse aucun doute: c'est l'accord parfait de l'écliptique avec la ligne de l'attraction et avec une de ses directions.

Phénomène des Marées :

Ce phénomène s'explique au moyen de l'attraction que la lune exerce sur notre globe.



Soit T la Terre, L la lune, AB le diamètre terrestre passant par la lune. — Comme le diamètre de la terre est comparable à la distance des deux astres, l'attraction que la lune exerce sur le point A sera plus grande que celle qu'elle exerce sur le point T de la terre.

Si donc il se trouve en A des substances qui, par leur fluidité, puissent prendre un mouvement libre du côté de la lune terrestre, comme par exemple un liquide, le

liquide sera attiré. — De même, l'attraction de la lune sera moins forte au point B qu'elle n'est au centre de la terre. — Le centre et avec lui toute la masse solide, tendra à se rapprocher de la lune plus que ne le font les molécules liquides situées en B, et par conséquent il y aura encore en B une masse liquide plus élevée que la surface du niveau. — En A, du côté de la lune, c'est le liquide qui est attiré au dessus de la terre, tandis qu'en B, du côté opposé, c'est la surface de la terre qui se rapproche de la lune et laisse le liquide plus élevé.

Il en résulte que deux masses d'eau, sans la présence de deux montagnes liquides opposées, suivent la lune dans sa marche, et par conséquent la surface des mers pendant la rotation diurne de notre globe. Lorsqu'elles rencontrent des écueils, elles s'y précipitent en flots se couvrant à une certaine hauteur, et reculant les fleuves qu'elles font refluer vers leurs sources : c'est le flux.

Les points de la mer situés en C et en D, à peu près à la même distance de la lune que le centre de la terre, sont attirés sensiblement comme ce centre, et, par leur communication avec le flux qu'ils concourent à former, elles se dépriment, et abandonnent les écueils qu'elles avaient recouverts. C'est le reflux.

Le temps de la révolution de la lune dans l'intervalle du passage de la lune au méridien d'un lieu, le point aura passé successivement par les divers états que nous offre le grand cercle ABCD par le point par le centre de la terre et celui de la lune.

Cet intervalle est un peu variable. Sa durée moyenne est de 24^h 50^m 28^s, à peu près 25 heures. Dans cet intervalle, il y aura deux fois haute mer. — Mais la haute mer celle que B voit par venir d'être que la haute mer en A.

L'attraction solaire agit aussi sur le phénomène des marées avec une influence analogue à celle de la lune, mais elle est moindre à cause du grand éloignement du soleil. C'est à midi et à minuit, pendant le passage du soleil au méridien, qu'il tend à élever les eaux de la mer, et celles-ci s'abaissent au contraire à six heures du soir.

et les forces du matin.

Indépendamment des marées lunaires, il pourrait donc y avoir des marées solaires pour l'eau.

Dans les Syzygies, les deux astres passent en même temps au méridien. Leurs actions s'ajoutent, et il n'y a que deux marées dont les intensités sont les sommes des effets produits par les deux astres.

Dans les Quadratures, la haute mer de la marée lunaire a lieu en même temps que la basse mer de la marée solaire, et réciproquement. On voit qu'ainsi, la marée telle qu'on l'observe est la différence des deux marées particulières.

En général, on ne distingue que les marées lunaires. Mais elles sont augmentées dans les Syzygies et diminuées dans les Quadratures, à tout l'effet produit par le Soleil.

Dans les positions intermédiaires, les attractions des deux astres se composent, et celle du Soleil ne fait jamais qu'augmenter ou diminuer l'intensité de la Marée lunaire.

Il est évident qu'en général, les plus hautes marées ont lieu à l'époque des Syzygies, et les plus faibles, à celle des Quadratures.

Le calcul suivant rendra ce résultat évident, et de plus permettra de conclure la masse de la Lune de l'observation des marées.

Soit R la distance du centre de la Lune à celui de la Terre.

L'attraction exercée sur l'unité de masse au centre de la Terre a pour expression

$$\frac{fm}{R^2}$$

m étant la masse de la Lune.

L'attraction exercée sur le point A a donc pour expression

$$\frac{fm}{(R-r)^2}$$

et la force qui produit la Marée est

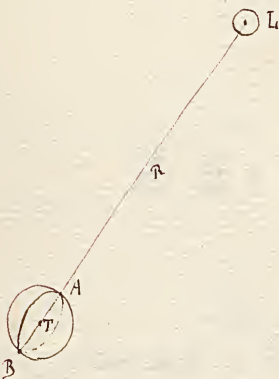
$$fm \left\{ \frac{1}{(R-r)^2} - \frac{1}{R^2} \right\}$$

ou bien

$$\frac{fm}{R^2} \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{r}{R}\right)^2} - 1 \right\} = \frac{fm}{R^2} \left\{ \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-2} - 1 \right\}$$

En développant, et négligeant les puissances de $\frac{r}{R}$ supérieures à la première, il vient

$$\frac{fm}{R^2} \cdot \frac{2r}{R} \quad \text{ou} \quad \frac{2fm r}{R^3}$$



En ne considérant que la même approximation, on trouverait la même valeur pour l'intensité de la force qui produit la marée au point B.

On voit donc que cette force Marée en Raison Inverse Du Cube De la Distance Du Centre; d'où il suit que cette force est plus grande quand la Lune est au périgée que quand elle est à l'apogée.

La force attractive Du Soleil qui produit les marées aura De même pour Expression

$$\frac{2fMr}{R^3}$$

M étant la masse Du \odot , R la Distance Du Centre de celui De la Terre. Cette force est sensiblement constante, car les variations De la Distance Du \odot à la Terre sont trop faibles pour que l'effet en soit appréciable sur les marées.

Soit a l'action De la Lune, A celle Du Soleil.

Dans les Syzygies, la force Totale sera $A+a$, Dans les quadratures, $a-A$.

on peut admettre que la hauteur Dont la mer est élevée au-dessus De son niveau moyen est proportionnelle à ces forces. — or une série d'observations très-longues a montré que ces hauteurs sont entre elles comme 7 et 3.

on aura donc

$$a+A : a-A :: 7 : 3$$

$$a : A :: 10 : 4$$

$$:: 5 : 2$$

$$\frac{a}{A} = \frac{2fmr}{R^3} : \frac{2fMr}{R^3} = \frac{m}{M} \cdot \frac{R^3}{R^3}$$

d'où

$$\frac{m}{M} \cdot \frac{R^3}{R^3} = \frac{5}{2}$$

d'où l'on conclut le Rapport De la Masse De la Lune à celle Du Soleil, et par suite, à celle De la Terre, car on connaît le Rapport De ces deux dernières.

on a trouvé ainsi que le Rapport Des masses De la Lune et De la Terre est $\frac{1}{75}$.

Montez indubitablement, fondée sur l'existence Des perturbations, et susceptible D'une plus grande précision, ont donné $\frac{1}{81}$.

La position Du Soleil et De la lune par Rapport à la Terre a une grande influence sur les marées. La théorie montre qu'en général, l'attraction soit Du \odot soit De la lune sur les eaux De la mer, toutes choses égales d'ailleurs, atteint son maximum quand l'astre est dans le plan De l'équateur terrestre, et diminue rapidement quand la latitude

augmente. — ainsi les marées des pluies et des nouvelles Lunes les plus rapprochées duéquinox sont en général les plus fortes de l'année, surtout quand il arrive qu'une lune et en même temps à son péri-gée. — Elle sont environ doubles des plus faibles, abstraction faite de la perméance et de la direction des Vents, qui peuvent augmenter ou diminuer sensiblement le phénomène.

L'instinct de la Mer dans les Pygmées n'est pas, comme on pour-rait le croire, à midi ou à minuit précis, heures du passage commun de la lune et du \odot au méridien. — Il y a des Retards qui tiennent à la configuration des côtes, et qu'on nomme, pour l'Espagne l'ine, l'Établissement du Port. — le Retard est de $3^h 30^m$ à Brest, de 6^h à St. Malo, de $10^h 30^m$ à Sijpe.

on observe encore que la plus grande marée n'arrive pas le jour où elle est indiquée par le calcul, mais 36 h. après.

Observons enfin que l'étendue des vagues doit contribuer à leur élévation, en favorisant leurs mouvements déterminés par l'attraction du Soleil et de la lune. — ainsi les marées sont presque insensibles dans la Méditerranée; elles le sont tout-à-fait dans la mer Caspienne et la mer Noire.

(Lionville, T. 9. : Delaunay, sur le Retard des Marées maximum).

Expression du Mouvement ascensionnel de la mer en fonction du Temps.

Considérons d'abord le mouvement produit par l'action seule de la lune. Le mouvement se composera d'une partie constante, qui sera la hauteur moyenne, et d'une partie variable, qui dépendra de la position de la lune, et qui par conséquent sera fonction du Temps. Cette partie variable, étant périodique, pourra s'exprimer par un sinus ou un cosinus.

Soit donc a la hauteur moyenne de la mer dans tel lieu pour lequel on veut calculer son mouvement, h sa hauteur pour une certaine position de la lune. Posons

$$h = a + \mu \cos V$$

où V étant un angle qui dépend de la position de la lune, et μ un coefficient constant qui est la plus grande variation de hauteur, ou plus ou moins, de la valeur moyenne a .

Soit ε l'angle que le cercle horizon de la lune fait à l'instant t . V sera une fonction de ε . .. appelons ξ la valeur de cet angle

8 au moment de la plus grande hauteur de la mer. - Nous exprimons quatre valeurs de la fonction v : car on doit avoir

$$\left\{ \begin{array}{ll} h = a + \mu & \text{pour } \varepsilon = \zeta \\ h = a - \mu & \text{" } \varepsilon = \zeta + 90^\circ \\ h = a + \mu & \text{" } \varepsilon = \zeta + 180^\circ \\ h = a - \mu & \text{" } \varepsilon = \zeta + 270^\circ \end{array} \right.$$

on voit donc que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \cos v = 1 & \text{quand } \varepsilon - \zeta = 0 \\ \cos v = -1 & \text{" } \varepsilon - \zeta = 90^\circ \\ \cos v = 1 & \text{" } \varepsilon - \zeta = 180^\circ \\ \cos v = -1 & \text{" } \varepsilon - \zeta = 270^\circ \end{array} \right.$$

Donc

$$v = 2(\varepsilon - \zeta)$$

et

$$h = a + \mu \cos 2(\varepsilon - \zeta)$$

L'expérience montre que cette formule satisfait bien en effet au mouvement de la mer.

Comme le coefficient μ exprime la plus grande variation de hauteur, il est naturel de supposer proportionnel à la force qui produit cette variation.

$$\mu = b \frac{m r}{R^2}$$

b étant le coefficient qui convient pour le port pour lequel on construit la formule.

Il faut maintenant exprimer en fonction du temps l'angle que fait la lune avec le méridien.

Soit la connaissance des Temps donne pour tous les Jours l'Angle de la lune. Soit φ cette Angle. - Il suffit de connaître l'angle que la ligne des Equinoxes fait avec le méridien au moment pour lequel on calcule la hauteur de la mer. - Soit t le temps sidéral, compte à partir de la ligne des Equinoxes, jusqu'au méridien, n la vitesse de Rotation de la Terre :

$$\varepsilon = nt - \varphi$$

Donc

$$h = a + b \frac{m r}{R^2} \cos 2(nt - \varphi - \zeta)$$

Le mouvement de la mer occasionné par le soleil s'exprime par une formule semblable.

$$\frac{b' M r}{R'^2} \cos 2(nt - \varphi' - \zeta')$$

Donc

$$H = a + \frac{b m r}{R^2} \cos 2(nt - \varphi - \zeta) + \frac{b' M r}{R'^2} \cos 2(nt - \varphi' - \zeta')$$

on peut par cette formule, calculer l'angle de la plus grande Merve en hauteur et en profondeur.

Pour cela, il suffit de poser

$$\frac{dH}{dt} = 0.$$

φ et φ' varient avec le temps. Leurs valeurs dépendent donc du temps que l'on suppose. Mais ce temps est à peu près connu, de sorte qu'on aura obtenus à peu près les valeurs de φ et de φ' . Et, comme ces quantités varient lentement, on pourra leur supposer des valeurs approximatives et les regarder comme constantes.

on a alors en différentiant

$$\frac{b_m}{R^3} \sin 2(nt - \varphi - \zeta) + \frac{b'_m}{R'^3} \sin 2(nt - \varphi' - \zeta') = 0$$

$$\frac{b_m}{R^3} \sin 2(nt - \varphi - \zeta) + \frac{b'_m}{R'^3} \sin 2\{nt - \varphi - \zeta - (\varphi - \varphi' + \zeta - \zeta')\} = 0$$

Développant

$$\frac{b_m}{R^3} \sin 2(nt - \varphi - \zeta) + \frac{b'_m}{R'^3} \{\sin 2(nt - \varphi - \zeta) \cos(\varphi - \varphi' + \zeta - \zeta') + \cos 2(nt - \varphi - \zeta) \sin(\varphi - \varphi' + \zeta - \zeta')\} = 0$$

Posant

$$\varphi - \varphi' + \zeta - \zeta' = \psi$$

$$\left(\frac{b_m}{R^3} + \frac{b'_m}{R'^3} \cos 2\psi \right) \sin 2(nt - \varphi - \zeta) + \frac{b'_m}{R'^3} \sin 2\psi \cos 2(nt - \varphi - \zeta) = 0$$

$$\tan 2(nt - \varphi - \zeta) = - \frac{\frac{b'_m}{R'^3} \sin 2\psi}{\frac{b_m}{R^3} + \frac{b'_m}{R'^3} \cos 2\psi}$$

Le temps t qui de cette formule sera connu nous fera de la plus grande mer le Lini. blanc.

astronomie.

Cours de M^r. Boye, 1852-53.

W. H. W. H.

Parallaxe et aberration.

Supposons que l'on rapporte les astres à trois axes de Coordonnées. — Prenons pour origine au centre du Soleil. Prenons pour plans des xy celui de l'orbite Terrestre. Les coordonnées relatives à ces axes seront des Coordonnées Héliocentriques. Soient x, y, z celles d'une étoile E .

Soient aussi l'angle des équinoxes.

Designons par λ la latitude ESP de l'étoile, et par L sa longitude xSP , observés du Soleil.

Soit enfin $SE = d$.

La longitude et la latitude peuvent se déterminer directement, tandis que x, y, z ne peuvent l'être. Mais on peut chercher une relation entre x, y, z , L et λ . on aura en effet

$$(1) \begin{cases} x = d \cos \lambda \cos L \\ y = d \cos \lambda \sin L \\ z = d \sin \lambda \end{cases}$$

Ces trois équations donnent les valeurs des coordonnées rectangulaires de l'étoile en fonction de la latitude et de la longitude de l'étoile observés du Soleil; et, comme les observations ne peuvent se faire que de la surface de la Terre, il faut avoir x, y, z en fonction des quantités d', L', λ' correspondantes à d, L, λ .

En transportant les axes parallèlement à eux-mêmes de façon que l'origine vienne en T , on aura évidemment

$$(2) \begin{cases} x' = d' \cos \lambda' \cos L' \\ y' = d' \cos \lambda' \sin L' \\ z' = d' \sin \lambda' \end{cases}$$

Eq. auxquelles il faut joindre

$$(3) \begin{cases} x' = x - \alpha \\ y' = y - \beta \\ z' = z \end{cases}$$

α et β sont les coordonnées héliocentriques de la Terre.

Soit T l'angle TSx , R la distance de la Terre au Soleil. on aura

$$\begin{cases} \alpha = R \cos T \\ \beta = R \sin T \end{cases}$$

Donc

$$(4) \quad \begin{cases} x' = x - R \cos T \\ y' = y - R \sin T \\ z' = z \end{cases}$$

En tout, neuf équations, (1) (2) et (4).

Si dans (4) on remplace x', y', z' par leurs valeurs (2), et x, y, z par leurs valeurs (1), il viendra

$$(5) \quad \begin{cases} d' \cos \lambda' \cos L' = d \cos \lambda \cos L - R \cos T \\ d' \cos \lambda' \sin L' = d \cos \lambda \sin L - R \sin T \\ d' \sin \lambda' = d \sin \lambda \end{cases}$$

Multip lions maintenant la 1^{re} de ces Eq. (5) par $\cos L$, la 2^{de} par $\sin L$, et ajoutons : il viendra

$$(6) \quad d' \cos \lambda' \cos (L' - L) = d \cos \lambda - R \cos (T - L)$$

Si nous multiplions la 1^{re} par $\sin L$ et la 2^{de} par $\cos L$, et que nous retranchions, nous aurons

$$(7) \quad d' \cos \lambda' \sin (L' - L) = R \sin (T - L)$$

Divisons (6) et (7) membre à membre

$$(8) \quad \tan (L' - L) = \frac{R \sin (T - L)}{d \cos \lambda - R \cos (T - L)}$$

or les observations donnent L' qui est à peu près égal à L . Donc $L' - L$ est fort petit. — D'autre part, d est très grand relativement à R . Donc on pourra négliger le premier membre du D. N. — Nous aurons alors succinctement

$$\tan (L' - L) = \frac{\frac{R}{d} \sin (T - L)}{\cos \lambda - \frac{R}{d} \cos (T - L)} = \frac{\frac{R}{d} \frac{\sin (T - L)}{\cos \lambda}}{1 - \frac{R}{d} \frac{\cos (T - L)}{\cos \lambda}} = \frac{R}{d} \frac{\sin (T - L)}{\cos \lambda} \left(1 + \frac{R}{d} \frac{\cos (T - L)}{\cos \lambda} \right)$$

$$\tan (L' - L) = \frac{R}{d} \sec \lambda \sin (T - L)$$

en négligeant $\left(\frac{R}{d}\right)^2$. — On a enfin

$$(9) \quad L' - L = \frac{R}{d} \sec \lambda \sin (T - L)$$

De même que nous avons obtenu des formules (5) la différence des longitudes observées du centre du Soleil et du centre de la Terre, de même nous pourrions obtenir la différence des latitudes.

Multip lions en effet la 1^{re} des 3^{es} équations (5) par $\cos \frac{1}{2}(L' - L)$, et l'éq. (7) par $\sin \frac{1}{2}(L' - L)$ et ajoutons : si nous retranchons que l'on a en général

$$\cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} = \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \cos \frac{\alpha}{2} + \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2}$$

d'ailleurs

$$d' \cos \lambda' \cos \frac{1}{2} (L' - L) = d \cos \lambda \cos \frac{1}{2} (L' - L) - R \cos (T - L) \cos \frac{1}{2} (L' - L) + R \sin (T - L) \sin \frac{1}{2} (L' - L)$$

$$d' \cos \lambda' = d \cos \lambda - R \cos (T - L) + R \sin (T - L) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (L' - L)$$

(10)

$$d' \cos \lambda' = d \cos \lambda - K$$

en posant

$$K = R \cos (T - L) - R \sin (T - L) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (L' - L)$$

Si l'on combine maintenant la 3^e de l'équation (5) avec l'eq. (10), on aura successivement

$$\left. \begin{aligned} d' \sin \lambda' (d \cos \lambda - K) &= d \sin \lambda + d' \cos \lambda' \\ d d' (\sin \lambda' \cos \lambda - \sin \lambda \cos \lambda') &= K d' \sin \lambda' \\ &= K d \sin \lambda \end{aligned} \right\} \text{Donc } \sin (\lambda' - \lambda) = \frac{K \sin \lambda}{d'}$$

$$\left. \begin{aligned} d' \cos \lambda' \cos \lambda &= d \cos^2 \lambda - K \cos \lambda \\ d' \sin \lambda' \sin \lambda &= d \sin^2 \lambda \end{aligned} \right\} \text{Donc } \cos (\lambda' - \lambda) = \frac{d - K \cos \lambda}{d'}$$

et par suite

$$\operatorname{tg} (\lambda' - \lambda) = \frac{K \sin \lambda}{d - K \cos \lambda}$$

et, comme λ' diffère peu de λ

$$\lambda' - \lambda = \frac{\frac{K}{d} \sin \lambda}{1 - \frac{K}{d} \cos \lambda} = \frac{K}{d} \sin \lambda \left(1 + \frac{K}{d} \cos \lambda \right)$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{K}{d} \sin \lambda \quad \left(\text{on négligeant } \frac{K^2}{d^2} \right).$$

Remplaçons K par sa valeur, en ne conservant que le premier terme, puisque $\operatorname{tg} \frac{1}{2} (L' - L)$ est très-petit et que, multiplié par $\frac{\sin \lambda}{d}$, il donne un infini-petit du 2^d ordre :

$$(11) \quad \lambda' - \lambda = \frac{R}{d} \sin \lambda \cos (T - L)$$

Telles sont les expressions de la Parallaxe annuelle en Longitude et en Latitude.

La parallaxe est nulle quand $L' - L = 0$ ou $= 180^\circ$, c.à.d. aux époques des conjonctions et des oppositions : alors en effet la parallaxe doit se porter tout entière sur la latitude. — or, comme dans ce cas $T = L$, on a

$$\lambda' - \lambda = \frac{R}{d} \sin \lambda$$

c'est le maximum de $\lambda' - \lambda$.

La parallaxe en latitude, δ son tour, devient nulle quand $T - L = \pm 90^\circ$. C'est le cas où le \odot est en quadrature avec l'étoile, et où le rayon vecteur héliocentrique de celui-ci devient perp. au rayon vecteur de la Terre. — Le maximum de $L' - L$ devient

$$L' - L = \pm \frac{R}{d} \sec \lambda.$$

Nous avons trouvé les deux formules

$$L' - L = -\frac{R}{d} \sec \lambda \sin (T - L)$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{R}{d} \sin \lambda \cos (T - L)$$

limitées la première. Elle surpasse deux inconnues, T et d et L . Il faut donc deux observations pour les déterminer. — Nous observons à deux époques où la parallaxe $L' - L$ atteindra son maximum positif ou négatif. Choisissons l'époque où $T - L = 90^\circ$ et celle où $T - L = 270^\circ$. alors nous aurons

$$L'_1 - L = -\frac{R}{d} \sec \lambda$$

$$L'_2 - L = \frac{R}{d} \sec \lambda$$

D'où l'on peut déduire $\frac{R}{d}$ et L . — λ n'est pas connu, mais on peut le remplacer par λ' .

Mais ce n'est pas ainsi qu'aujourd'hui l'on résout la question. on tient compte de toutes les observations, et l'on a plusieurs équations de condition que l'on traite par la méthode des moindres carrés. — on trouve de toutes les équations la valeur de $\frac{R}{d}$. Toutes les valeurs ainsi obtenues ont l'avantage de montrer que le phénomène suit bien la loi géométrique exprimée par la formule.

Pour toutes les étoiles observées, on a toujours trouvé $\frac{R}{d} < 1''$. — Pour la 61^e du Cygne, $\frac{R}{d} = 0'',37$, c.à.d. que l'étoile de la Terre serait vue de l'étoile sous un angle de $0'',37$. — Pour avoir la valeur numérique de la distance, il faut diviser (?) $0'',37$ par $\frac{1}{206265}$. on a

$$d = \frac{206265}{0,37} R.$$

En faisant le calcul, on trouve $d = 592000 R$. — R étant toujours le rayon de l'orbite terrestre.

Voici le tableau des parallaxes qu'on a trouvées

	$\frac{R}{d} = \pi =$ parallaxe	incertitude	d	incertitude
2 Centaure	$0'',91$	$\pm 0,07$	$227000 R$	$\pm \frac{1}{13} d$
61 ^e Cygne	$0,37$	$\pm 0,02$	592000	$\pm \frac{1}{19}$
Polaris	$0,23$			
α Lyre	$0,21$	$\pm 0,04$		
δ Cassio	$0,11$	$\pm 0,01$		
La Chèvre	$0,05$	$\pm 0,20$		

Le doute d'approximation subsiste au moyen des équations de condition.

Il y a là une conclusion importante pour l'astronomie : Notre système est-il juste dans le monde ? — L'action des étoiles peut être négligée en faveur ou au contraire au contraire.

Les anciens objectaient aux Pythagoriciens que les étoiles devaient être des ellipsoïdes si la Terre tournait autour du Soleil, et ils se voyaient par ces ellipsoïdes. Tycho fit la même objection au système de Copernic.

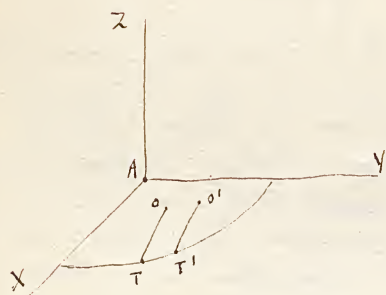
Les astronomes se souviennent pour ces grandes distances d'une mesure qui est l'époque que la lumière parcourt en un an. — Elle parcourt le

rayon de l'orbite terrestre en $8^m 17^s,5$ ou $297^s,8$. Donc, en un an, elle parcourt 63000 Rayons de l'orbite terrestre. — Elle met 3 ans à nous venir d'α du Centaure, et 9 ans à venir de α de la Lygne.

Pour tant de la vitesse non infinie de la lumière, nous ne pouvons pas la tracer dans une véritable position. — Le mouvement de la terre combiné avec la vitesse de la lumière donne lieu à l'aberration.

Exemple d'un boulet de canon qui traverse un navire.

Il en est de même d'un rayon de lumière qui tombe dans l'eau.



Prenons 3 axes rectangulaires, A étant le centre du Soleil; supposons l'orbite terrestre dans le plan de XY , et AX la ligne du équinoxes et perpendiculaire à laquelle se comptent les longitudes.

Soit TO la lumière arrivée vers la position apparente de l'étoile. $l = TO =$ la longueur de la lumière.

Soient x, y, z les coordonnées du point T.

Soient x', y', z' celles du point O .

Soient enfin α, β, γ celles du même point O relat.

venant à trois axes parallèles aux premiers, et déplacés par le point T.

On aura

$$\alpha = l \cos \lambda \cos \lambda'$$

$$\beta = l \cos \lambda \sin \lambda'$$

$$\gamma = l \sin \lambda$$

et par suite

$$x = x + l \cos \lambda \cos \lambda'$$

$$y = y + l \cos \lambda \sin \lambda'$$

$$z = z + l \sin \lambda \quad \text{et } z = 0.$$

Soit dt le temps employé par la lumière pour venir de l'étoile O à l'œil de l'observateur. T est venu en T' et a pris les coordonnées $x+dx, y+dy, z+dz$; et il en a évidemment, 1.° v est la vitesse de la lumière, $OT' = v dt$.

Les projections de OT' sur les trois axes sont, OT' étant véritablement la vitesse direction dans laquelle on devrait voir l'étoile,

$$v dt \cos \lambda \cos \lambda'$$

$$v dt \cos \lambda \sin \lambda'$$

$$v dt \sin \lambda$$

Maintenant, la différence des coordonnées de deux points O et T' relativement à un axe quel. est la seule longueur à la projection sur cet axe de la ligne OT' qui lui joint. Donc

$$x + l \cos \lambda \cos \lambda' - (x + dx) = v dt \cos \lambda \cos \lambda'$$

$$y + l \cos \lambda \sin \lambda' - (y + dy) = v dt \cos \lambda \sin \lambda'$$

$$z + l \sin \lambda - (z + dz) = v dt \sin \lambda$$

ou

$$l \cos \lambda \cos \lambda' = v dt \cos \lambda \cos \lambda' + dx$$

$$l \cos \lambda \sin \lambda' = v dt \cos \lambda \sin \lambda' + dy$$

$$l \sin \lambda = v dt \sin \lambda + dz$$

$$\xi = (L' - L) \cos \lambda$$

$$\eta = \lambda' - \lambda$$

Remplaçant $L' - L$ et $\lambda' - \lambda$ par leurs valeurs, et éliminant T , on a

$$\frac{y^2}{\sin^2 \lambda} + x^2 = \frac{u^2}{v^2}$$

équation d'une ellipse, dont le grand axe est constant pour toutes les étoiles. Montrons maintenant comment on peut dériver de la vitesse de la lumière.

Prenons l'équation

$$L' - L = \frac{u}{v} \sec \lambda \cos (T - L)$$

on fait deux observations quand $L' - L$ est maximum, c.à.d. quand $T - L = 0$ et une ou $= 180^\circ$. — on trouve

$$\frac{u}{v} = 20'', 445$$

ou

$$\frac{u}{v} = 20,445 \times \frac{1}{206265}$$

$$v = 10000 \cdot u \text{ milions.}$$

or la vitesse de la Terre peut se calculer aisément. on a $u = 7 \frac{\text{liens}}{\text{seconde}}$
d'où $v = 77000$ liens.

Nous ne nous sommes servis que de deux observations: — on en prend 4 ou 500.

La valeur $\frac{u}{v} = 20'', 445$ est soumise à une incertitude de $\pm 0'', 011$. on connaît ainsi la vitesse de la lumière à $\frac{1}{700}$ près.

Toutes les étoiles donnent la même valeur. — Il faut en conclure que la vitesse de leur lumière est la même, quelles que soient la grandeur et la couleur de l'étoile.

Cherchons à rattacher la relation précédente de l'aberration à celle des variations observées dans les éclipses des satellites de Jupiter.

Nous avons trouvé pour l'aberration en longitude

$$\xi_j (L' - L) = \frac{u}{v} \sec \lambda \cos (T - L)$$

L et λ sont les coordonnées de l'étoile sans aberration, comme si la Terre était immobile, L' est sa longitude apparente. — Comme L' et L diffèrent très-peu, on peut remplacer la tangente par l'angle, et, en mettant les unités convenables en évidence, écrire

$$L' - L = \frac{u}{v \sin''} \sec \lambda \cos (T - L)$$

$\frac{u}{v \sin''}$ exprimé des secondes. C'est la constante de l'aberration. — Posons

$$\frac{u}{v \sin''} = \mu$$

$$\mu = 20'', 445 \pm 0'', 011$$

Pour avoir la signification nette de μ , il faut examiner comment se compose sa valeur. — u est la vitesse linéaire de la Terre, qu'on ne connaît pas immédiatement. — appelons ω sa vitesse angulaire. On aura

$$u = R \omega \sin i''$$

ω est connu avec une précision connue, pour R c'est autre chose, il y a quelque incertitude. — Par conséquent, nous aurons

$$\mu = \frac{R \omega}{V}$$

en sorte que nous tombons sur l'équation

$$\frac{\mu}{\omega} = \frac{R}{V}$$

$\frac{R}{V}$, quotient d'une longueur par une vitesse, exprimé en Secondes le Temps qui met la lumière à parcourir la distance R . — Nous voyons que les observations astronomiques ne nous donneront pas V , mais $\frac{R}{V}$.

Calculons ce Temps : c'est celui que Roemer a tiré de l'observation des satellites de Jupiter. — ω est facile à trouver. on sait que la Terre a une vitesse linéaire angulaire de $59' 8'', 33$. Donc, par seconde,

$$\omega = \frac{59' 8'', 33}{46400} = 0'', 0410613$$

Donc

$$\frac{\mu}{\omega} = \frac{R}{V} = 498^s \text{ ou plus exactement } = 497^s, 8$$

c'est le Temps employé par la lumière pour parcourir R : c'est ce que Roemer a tiré de l'observation des satellites de Jupiter.

Roemer, qui a signalé la discordance de l'époque prédite des éclipses avec l'époque observée, avait trouvé $4^m 17^s, 8$, le Temps exact.

Lorsque Delambre reprit ces calculs, il trouva $5^m 13^s$: c'est à l'aide de ce nombre qu'il avait conclu la valeur de μ , $\mu = 20'', 22$ ou bien de $20'', 445$.

Puisque la lumière emploie un Temps sensible pour parcourir les espaces célestes, il en résulte pour les planètes un phénomène curieux. Il n'existe pas, sous deux points de la voûte céleste à époque antérieure (c'est-à-dire pour les satellites à l'horizon terrestre pour cette voûte) une seule planète, un seul astre qui soit réellement à la place où on les voit. — Pour les planètes surtout, le horizon de lumière qui vient à l'œil était parti à une époque antérieure de $\frac{d}{V}$ $8^m 18^s$. ainsi nous voyons le Soleil dans la position qu'il occupait $8^m 18^s$ plus tôt.

Pour avoir les positions réelles, il suffit de retrancher de L' et de λ' les variations de ces coordonnées pendant $8^m 18^s$: ou pendant un autre temps déterminé de la distance de l'astre à la Terre. Soient $\Delta L'$ et $\Delta \lambda'$ ces variations pour 1^s . Je suppose de les multiplier par le nombre de secondes, et de retrancher de L' et λ' : on aura la position vraie.

Pour le Soleil en particulier, puisqu'il décrit en apparence le cercle que la Terre décrit en réalité, il est évident que le Soleil, dans sa route annuelle, nous paraît toujours en retard précisément de la quantité μ . C'est à μ qu'il faut ajouter à sa longitude observée pour avoir sa longitude vraie.

De l'équation

$$\frac{V}{R} = \frac{\omega}{\mu}$$

on déduit

$$\mu = \omega : \frac{V}{R} = \omega \cdot \frac{R}{V}$$

Si donc on multiplie la vitesse angulaire de la Terre par $8^m 18^s$, j'en

Résultat que je n'est autre chose que l'espace angulaire parcouru par la Terre en 9^m 18^s.

Delà cette nouvelle interprétation de μ :

C'est le déplacement angulaire du Soleil pendant le temps que met la lumière à nous arriver de cet astre.

Examinons maintenant jusqu'à quel point cette théorie peut être confirmée par des phénomènes purement physiques.

Autrefois, à l'époque où l'astronomie n'est renouvelée, on a cherché à déterminer la vitesse de la lumière non pas par l'astronomie, mais comme simple objet de curiosité.

Expériences de Galilée.

Méthode de Descartes par les éclipses de lune.

Expériences de Rømer. - Résultat : 40000 lieues de 4000^m.

Après s'être apprécié la valeur de ces Résultats, il est nécessaire de voir avec quelle approximation nous connaissons astronomiquement $v = 77000$?

L'incertitude est une fonction de R et de μ : car on a

$$v = \frac{R\omega}{\mu}$$

et ω est parfaitement connu. Nous connaissons $\pm \delta R$ et $\pm \delta \mu$: d'où faut déduire l'incertitude de v .

$$dv = \frac{\omega}{\mu} dR - \frac{R\omega}{\mu^2} d\mu$$

$$dv = \frac{v}{R} dR - \frac{v}{\mu} d\mu$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dR}{R} - \frac{d\mu}{\mu}$$

$\frac{dR}{R}$ est l'incertitude de R exprimée en parties de R ; de même les autres. Le calcul des probabilités montre que la grandeur $\frac{dv}{v}$ ou l'erreur s'écrit sur v est la Racine de la somme des carrés des deux autres

$$\frac{\delta v}{v} = \sqrt{\left(\frac{\delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\delta \mu}{\mu}\right)^2}$$

Ici, nous pouvons mettre des nombres : car nous connaissons R et δR . R nous est donné par la formule précédente

$$\frac{v}{R} = 8",57 \quad (\pm 0",04)$$

R est donc connue avec une erreur possible $\frac{0",04}{8",57}$ ou $\frac{1}{200}$. Quant à $\frac{d\mu}{\mu}$, nous savons que $\mu = 20",44 \pm 0",011$.

$$\frac{\delta v}{v} = \sqrt{\left(\frac{1}{200}\right)^2 + \left(\frac{1}{2000}\right)^2} = \frac{1}{200} \text{ à peu près.}$$

Reste à savoir si les expériences de M^r Rømer peuvent donner une plus grande approximation. - Si cela était, on pourrait en déduire une valeur plus exacte de la lumière au Soleil.

Employons maintenant la méthode Synthétique : - et supposons, pour plus de simplicité, que l'orbite de la Terre soit un cercle parcouru d'un mouvement uniforme. Ne considérons l'autre que la Parallaxe :

Théorème I.

La parallaxe annuelle a pour effet q^e de nous faire voir l'étoile se déplacer comme si l'orbite de la Terre s'y trouvait transportée parallèlement à elle-même, et qu'elle étoit la distance dans le sens direct.

C'est une conséquence des lois du mouvement relatif.

C'est aussi le mouvement de l'étoile si la vitesse de la lumière étoit infinie. Mais nous savons qu'elle est comparable à celle de la Terre, et que l'aberration a pour effet d'abaisser un astre dans le sens de l'orbite à l'orbite terrestre : donc

Théorème II.

L'aberration seule a pour effet de déplacer l'étoile dans le sens du mouvement de la Terre, et de lui faire décrire, autour de son lieu géocentrique ^{vrai} apparent, un cercle parallèle à l'elliptique, de manière que le lieu géoc. apparent et le lieu vrai sont sur un arc de grand cercle passant par le point du ciel vers lequel la Terre se dirige actuellement.

Elle détermine de là la règle suivante :

Menez le lieu Héliocentrique de l'étoile pour centre de l'orbite terrestre, transportée parallèlement à elle-même. Si la Terre est en T, menez EM parallèle à ST, M sera la position géocentrique vraie de l'étoile. Menez MN tangente à l'orbite parallactique, et égale au rayon du cercle d'aberration : N sera la position géocentrique vraie.

Donc :

Théorème III.

L'effet combiné de la Parallaxe annuelle et de l'aberration est de faire décrire à l'étoile un cercle parallèle à l'elliptique, et dont le rayon EN est égal à la somme carrée de la somme des carrés des deux autres rayons EM et MN.

Maintenant, ce cercle est vu de la Terre plus ou moins obliquement, suivant qu'elle étoile elle-même se trouve plus ou moins rapprochée du plan de l'elliptique. Donc nous voyons en réalité une ellipse plus ou moins aplatie.

L'aberration agit donc comme si elle amplifiait simplement l'orbite parallactique.

analytiquement, on arrive aisément au même résultat.

En effet, on a trouvé :

$$\text{pour la Parallaxe} \quad L' - L = \pi \sec \lambda \sin (T - L)$$

$$\text{" l'aberration} \quad L' - L = \mu \sec \lambda \cos (T - L)$$

et de même

$$\text{Pour.} \quad \lambda' - \lambda = \pi \sin \lambda \cos (T - L)$$

$$\text{aberr.} \quad \lambda' - \lambda = -\mu \sin \lambda \sin (T - L)$$

Donc d'où le mouvement parallactique et le mouvement d'aberration ne diffèrent que par le changement de sinus en cosinus, et par suite, ont lieu en faisant un angle de 90°.

Transposons. - La différence absolutive entre la longitude apparente L' et la longitude vraie L est la somme des deux précédentes, et a pour valeur :

$$L' - L = \pi \sec \lambda \sin T \cos L - \pi \sec \lambda \sin L \cos T + \mu \sec \lambda \cos T \cos L + \mu \sec \lambda \sin T \sin L$$

$$L' - L = \sec \lambda \sin T (\pi \cos L + \mu \sin L) - \sec \lambda \cos T (\pi \sin L - \mu \cos L)$$

Posons

$$\pi \cos L + \mu \sin L = m \cos \varphi$$

$$\pi \sin L - \mu \cos L = m \sin \varphi$$

Donc

$$m^2 = \pi^2 + \mu^2$$

on aura

$$L' - L = m \sec \lambda \sin (T - \varphi)$$

on aurait de même pour la différence de longitude

$$\lambda' - \lambda = m \sin \lambda \cos (T - \varphi)$$

Remplaçant dans les formules

$$x = (L' - L) \cos \lambda$$

$$y = \lambda' - \lambda$$

et éliminant $(T - \varphi)$, on a l'ellipse

$$x^2 + \frac{y^2}{\sin^2 \lambda} = m^2 = \pi^2 + \mu^2$$

ce qui confirme bien la théorie géométrique.

On voit d'ailleurs que, l'équation précédente s'écrit

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{m^2 \sin^2 \lambda} = 1$$

le grand axe m a une longueur invariable, si π est constant.

Singuliers historiques.

Dans le commencement du système de Copernic, on comparait bien souvent des ellipses parallactiques: on trouva les ellipses d'aberration. De là des observations, et l'on dit que c'étaient les étoiles qui se trouvaient, et non le système de Copernic: l'on dit même d'aberration des étoiles.

On remarquait bien du reste que ces ellipses étaient d'autant plus étroites que les étoiles étaient plus rapprochées de l'écliptique, mais qu'elles avaient toutes même grand axe. — De plus, il y avait dissonance entre les observations propres et celle d'observation: l'étoile, sur son ellipse d'aberration, paraissait toujours à une position différente (de 90°) de celle qu'elle aurait dû avoir sur une ellipse parallactique.

Comment pourrait-on se tenir là? — Quelle que fût la cause physique du phénomène, on peut chercher à l'expliquer empiriquement.

Pour toutes les étoiles, on trouvait μ , grand axe de l'ellipse, égal à 20" ou, on avait trouvé la vitesse de la lumière: d'où l'on a une explication des phénomènes.

Accepter les faits précédents. — Si le système de Ptolémée est vrai, il n'est pas impossible d'expliquer les ellipses parallactiques: il suffit de faire tourner la sphère étoilée en un ou en deux si le Soleil était son centre: on se ferait expliquer que les étoiles sont à diverses distances. — Pour rendre

compte maintenant des ellipsoïdes d'aberration, en faisant de cet axe la parallèle, il suffit de faire passer la sphère par un point central situé à 90° en avant du soleil, et d'apposer les étoiles clouées à la sphère. - Si l'on combine ces deux hypothèses, on les trouve incompatibles. - Donc le système de Ptolémée est faux.

Différents Systèmes de Coordonnées employés en astronomie.

Supposons qu'on ait choisi un axe OA pour un certain système de coordonnées. Un plan, celui du papier, passant par cet axe, sera aussi déterminé, et l'on y rapporte les astres. - Il suffit alors de deux coordonnées dans ce système :

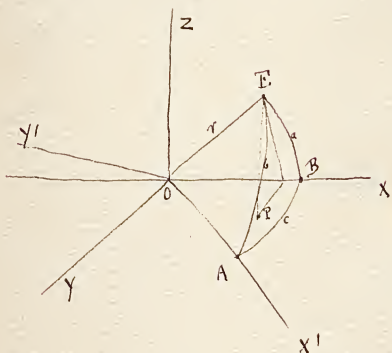
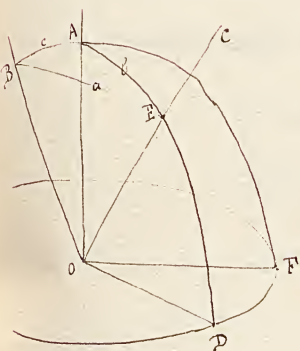
1^o l'angle COA ; 2^o l'angle droit A du plan COA avec le plan fixe.

Si nous menons alors un plan perp. à OA , AE sera déterminé par son complément ED , et l'angle A par DF .

Si maintenant on change d'axe, soit OB le nouvel axe : E sera déterminé de même par l'arc BE et l'angle droit B .

Les angles droits se comptent de 0 à 90° dans un certain sens défini, et les distances angulaires à l'axe, de 0 à 180° .

Pour passer des premières coordonnées aux secondes, prenons des coordonnées rectangulaires qui sont là comme intermédiaires, et qui serviront à la fin du calcul.



$$x = r \cos a$$

$$y = r \sin a \cos B$$

$$z = r \sin a \sin B$$

Changons maintenant d'axes rectangulaires. Je suppose de faire tourner les axes OX et OY dans leur plan. Nous aurons

$$x' = r \cos b$$

$$y' = r \sin b \cos A$$

$$z' = r \sin b \sin A$$

En outre, nous avons (en appelant C l'angle en E) les formules connues de transformation de coordonnées :

$$x = x' \cos C - y' \sin C$$

$$y = x' \sin C + y' \cos C$$

$$z = z'$$

Si l'on élimine x, y, z, x', y', z' entre ces neuf équations, on arrive à une équation, et l'on supprime, et l'on supprime,

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos a = \cos b \cos C - \sin b \sin C \cos A \\ \sin a \cos B = \sin c \cos b + \cos c \sin b \cos A \\ \sin a \sin B = \sin b \sin A \end{array} \right.$$

(Donn ces 3 formules et les 3 précédentes, il faut lire c au lieu de C).

Si l'on joint ces trois équations à celles de la parallèle et de l'obliquité, on aura toutes celles dont on se sert en astronomie, soit pour l'équinox d'origine, soit pour l'équinox d'usage.

C'est de tout les formules de la Trigonométrie sphérique, sous une seule différence dans la manière de compter les angles.

Il n'y a jamais de ces angles dans ces questions là.

Nous pourrions maintenant épuiser les axes les plus convenables pour résoudre certaines questions.

L'axe qui a pour axe la verticale sert pour la théorie de la Réfraction, et pour la Géodésie et les Nivellements.

Celui qui a pour axe la ligne du pôle sert pour la Géographie, la Navigation, la précession, la nutation et la figure de la Terre.

Celui qui a pour axe celui de l'écliptique sert pour la théorie des Éclipses et du système solaire tout entier.

Il y a encore l'axe de la ligne qui a pour axe la verticale. C'est le dernier des quatre axes. car la verticale et la seule ligne invariable qu'on puisse trouver à volonté; il faudrait des phénomènes géologiques immenses pour la faire varier. - Or on qu'elle se déplacât de 1", il faudrait transporter au pôle les montagnes de l'Himalaya.

La première question que nous rencontrons est celle de la Réfraction.

Réfraction.

Les données sont :

La verticale pour une ; - l'azimut et la distance Zénithale.

Dans cette théorie nous supposons que la Terre est sphérique, & que la verticale passe par le centre.

La hauteur de l'atmosphère est $1/100$ du rayon R .

Distribution de l'atmosphère en couches sphériques.

La Réfraction est nulle au zénith.

On soit qu'un rayon réfracté ne sort pas du plan d'incidence. - C'est ce qu'on exprime en astronomie en disant :

La Réfraction ne change pas l'azimut, mais altère seulement la distance Zénithale.

Le problème de la Réfraction ne peut se traiter d'une manière complète, mais seulement par des hypothèses et des approximations successives.

Supposons, comme première hypothèse, que l'on néglige la sphéricité de l'atmosphère. - Nous pourrions connaître l'azimut de la Réfraction, mais non la forme de la trajectoire ; en effet, la direction extrême ne dépend que des indices du vide, et de l'air dans lequel nous sommes plongés (voir p. 124).

Soit alors z la dist. Zénithale vraie

" z_1 " " apparente

et l l'indice de Réfraction de l'air en A par rapport au vide. - on aura

$$\frac{\sin I}{\sin R} = l$$

ou

$$\frac{\sin z}{\sin z_1} = l$$

Ci que nous voulons calculer, c'est la modification $z - z_1$. Posons

$$z - z_1 = p$$

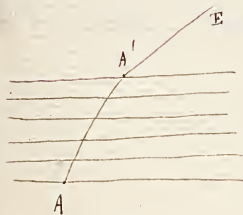
d'où

$$z = z_1 + p$$

$$\frac{\sin(z_1 + p)}{\sin z_1} = l$$

$$\sin z_1 + \sin p \cos z_1 = l \sin z_1 \quad (\text{en posant } \cos p = 1)$$

$$\sin p = (l - 1) \operatorname{tg} z_1$$



ou bien

$$\rho \sin 1'' = (l-1) \lg z,$$

$$\rho = \frac{l-1}{\sin 1''} \lg z.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{\sin 1''} = 206265'' \quad \text{et } l = 1,0002946 \quad \text{pour } \bar{h} = 0,760 \text{ et } t = 0^\circ$$

Alors

$$\rho = 60'',6 \lg z,$$

Cette formule n'est relative qu'à l'état atmosphérique $\bar{h} = 0,760$ et $t = 0^\circ$.
Mais on sait que $l-1$ varie proportionnellement à la densité. Nous pouvons
dire qu'il en est de même de $\frac{l-1}{\sin 1''}$, qui ne diffère de $\frac{1}{\sin 1''}$ que d'un infi-
niment petit du 2. ordre (p. 125). - or

$$\text{Densité à } t \text{ degrés} = \frac{1}{1 + 0,00366 t} \quad \text{si elle est 1 à } 0^\circ.$$

Dans ces cas donc, en désignant par \bar{h} la pression barométrique :

$$\rho = 60'',6 \times \frac{\bar{h}}{0,760} \times \frac{1}{1 + 0,00366 t} \times \lg z.$$

Cette formule s'accorde avec l'expérience jusqu'à 60° environ. - au zénith
elle donne $\rho = 0$, et à l'horizon, $\rho = \infty$.

Il n'y a rien d'absurde dans ce dernier résultat : c'est une conséquence
de notre hypothèse que l'atmosphère est infinie dans le sens horizontal.

on doit plutôt se demander comment, il se fait que les formules s'accordent
aussi bien. - C'est que nous avons supposé l'atmosphère plane, et, au lieu

de l'angle d'incidence véritable α , nous avons pris β . - or, pour une
distance zénithale de 60° , $\beta - \alpha \approx 1^\circ$ seulement, ce qui est bien
peu de chose pour la valeur de la réfraction.

La formule donne $\rho = \infty$ pour l'horizon. - Mais, si l'on
écrit dans l'équation

$$\frac{\sin(z_1 + \rho)}{\sin z_1} = l$$

et si l'on y fait

$$z_1 + \rho = 90^\circ \quad z_1 = 90^\circ - \rho$$

elle donne

$$\frac{1}{\cos \rho} = l$$

$$\sqrt{1 + \lg^2 \rho} = l$$

$$\lg \rho = \sqrt{l^2 - 1}$$

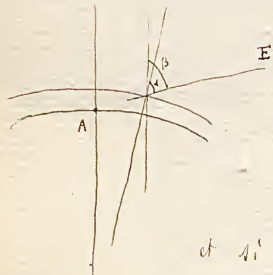
$$\rho = \frac{1}{\sin 1''} \sqrt{l^2 - 1}$$

Donc

$$\rho = 3500'' \text{ environ.}$$

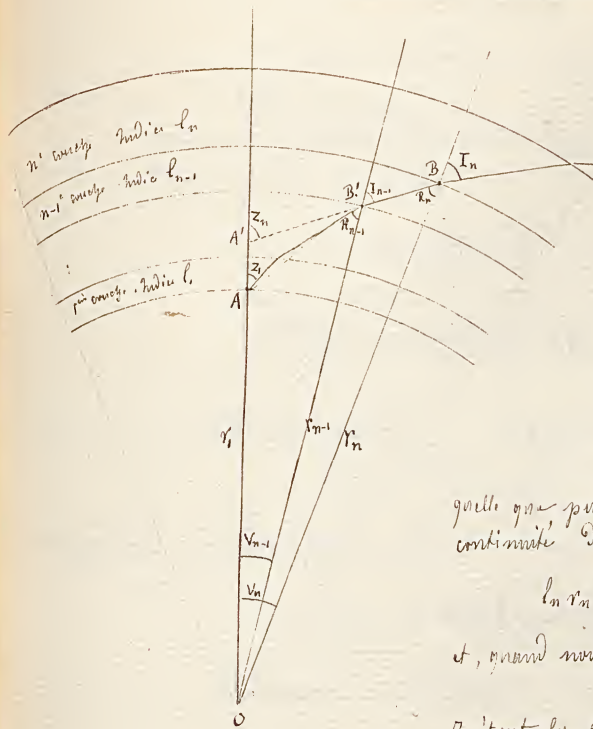
C'est à dire on a peu près 1° .

Les écarts qu'on observe à l'horizon ou tout près s'expliquent de grands



effets de dispersion. on aperçoit au lieu d'un point, une tache colorée: et le violet est en haut, parce que les objets sont renversés dans les lunettes.

Introduisons maintenant la Sphéricité des Couches d'air.



L'Equation de Réfraction est

$$\frac{\sin I_n}{\sin R_n} = \frac{l_{n-1}}{l_n}$$

Soit la Sphéricité des couches, formée pour le triangle $OB'B'$, on a

$$\frac{\sin R_n}{\sin I_{n-1}} = \frac{r_{n-1}}{r_n}$$

Combinaison des deux Equations:

$$\frac{\sin I_n}{\sin I_{n-1}} = \frac{l_{n-1} r_{n-1}}{l_n r_n}$$

quelle que puisse être la distribution des densités, pourvu qu'il y ait continuité dans l'atmosphère. - Cette Equation donne

$$l_n r_n \sin I_n = l_{n-1} r_{n-1} \sin I_{n-1} = \dots = \text{const.}$$

et, quand nous arrivons dans la première couche:

$$= l_1 r_1 \sin z_1$$

z_1 étant la distance horizontale apparente que nous mesurons.

Quelle que soit la courbe, nous voulons avoir l'angle des deux tangentes extrêmes, c. ad. la somme des angles de contingence de cette courbe depuis A jusqu'à une limite de l'atmosphère.

soit on a

$$\text{tg } I = \frac{r \, dv}{dr}$$

$$z = I + v$$

$$dp = dz = dI + dv$$

Différenciant l'Equation

$$r l \sin I = r_1 l_1 \sin z_1$$

on a

$$r l \cos I \, dI + l \sin I \, dr + r \sin I \, dl = 0$$

$$dI = - \frac{dr}{r} \text{tg } I - \frac{dl}{l} \text{tg } I$$

Introduisons dans la valeur $dp = dI + dv$, dI pour cette valeur, et dv pour $\frac{dr}{r} \text{tg } I$, il viendra

$$dp = - \frac{dl}{l} \text{tg } I = - \frac{dl}{l} \frac{\sin I}{\sqrt{1 - \sin^2 I}}$$

$$dp = - \frac{r_1 l_1 \sin z_1}{\sqrt{1 - (r_1 l_1 \sin z_1)^2}} \cdot \frac{dl}{l}$$

Telle est l'Equation différentielle qu'il faut maintenant intégrer.

Nous avons d'abord les variables qui y entrent. - ce sont l et r , et il faudrait exprimer l en fonction de r . - l'artifice consiste à poser des lois qui se rapprochent de la réalité. - nous en essayerons jusqu'à ce que nous trouvions des lois satisfaisantes conformes aux observations.

Il y a toujours des quantités qui varient très-peu, et dont les variations peuvent être négligées à partir d'une certaine puissance. ainsi, nous négligerons $(l^2-1)^2$. Puis, $\frac{r_1}{r}$ est très voisin de 1. Nous posons

$$\frac{r_1}{r} = 1 - s$$

et nous aurons

$$df = \frac{-(1-s) \sin z_1 \frac{dl}{l}}{\sqrt{\frac{l^2}{l_1^2} - (1-2s+s^2) \sin^2 z_1}} = - \frac{(1-s) \sin z_1 \frac{dl}{l}}{\sqrt{\cos^2 z_1 - (1-\frac{l^2}{l_1^2}) + (2s-s^2) \sin^2 z_1}}$$

$$df = - \frac{(1-s) \operatorname{tg} z_1 \frac{dl}{l}}{\sqrt{1 - (1-\frac{l^2}{l_1^2}) \sec^2 z_1 + (2s-s^2) \operatorname{tg}^2 z_1}}$$

Mais la physique donne

$$l^2 - 1 = k \delta \quad k = 0,000848$$

et ainsi par conséquent

$$l_1^2 - 1 = k \delta_1$$

ce qui va nous permettre de substituer les densités aux paramètres Réfringents. Différentiant, on a

$$2l dl = k d\delta$$

divisant par

$$2l^2 = 2(1+k\delta)$$

on a

$$\frac{dl}{l} = \frac{\frac{1}{2} k d\delta}{1+k\delta}$$

Substituant

$$df = - \frac{\frac{1}{2} (1-s) \operatorname{tg} z_1 \frac{k d\delta}{1+k\delta}}{\sqrt{1 - (1-\frac{l^2}{l_1^2}) \sec^2 z_1 + (2s-s^2) \operatorname{tg}^2 z_1}}$$

l n'a pas encore disparu. - on a

$$1 - \frac{l^2}{l_1^2} = 1 - \frac{1+k\delta}{1+k\delta_1} = \frac{k\delta_1 - k\delta}{1+k\delta_1}$$

Puis

$$k\delta_1 = 2\alpha (1+k\delta_1)$$

donc

$$k\delta = 2\alpha (1+k\delta_1) \frac{\delta}{\delta_1}$$

[α est précisément δ_1 ou 0,0002944 quand δ_1 correspond à la pression $b = 0,76$ et $t = 0$. Car on peut remarquer que δ_1 est très voisin de 1. Posons $\delta_1 = 1 + \epsilon$, $\delta_1 - 1 = \epsilon$; d'où $\delta_1^2 = (1+\epsilon)^2 = 1+2\epsilon$, $\delta_1^2 - 1 = 2\epsilon = 2(\delta_1 - 1)$. Puisque $\delta_1^2 - 1 = k\delta_1$, $2\epsilon = k\delta_1$ et $1+k\delta_1 = 1+2\epsilon$. Alors $2\alpha = \frac{k\delta_1}{1+k\delta_1} = \frac{2\epsilon}{1+2\epsilon} = 2\epsilon(1-2\epsilon) = 2\epsilon$; que l'on écrit $\alpha = \epsilon = \delta_1 - 1 = 0,0002944$, et $b = 0,76$ et $t = 0$).

Substituant, on trouve

$$1 - \frac{1+k\delta}{1+k\delta_1} = 1 - \frac{l^2}{l_1^2} = 2\alpha \left(1 - \frac{\delta}{\delta_1}\right)$$

et par suite

$$\frac{1+k\delta}{1+k\delta_1} = 1 - 2\alpha \left(1 - \frac{\delta}{\delta_1}\right), \quad 1+k\delta = (1+k\delta_1) \left\{1 - 2\alpha \left(1 - \frac{\delta}{\delta_1}\right)\right\} = \frac{k\delta_1}{2\alpha} \left\{1 - 2\alpha \left(1 - \frac{\delta}{\delta_1}\right)\right\}$$

Remplaçant dans dp , il vient

$$dp = - \frac{(1-s) \rho g z, \alpha \frac{d\delta}{\delta_1}}{\left\{1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_1}\right)\right\} \sqrt{1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_1}\right) \sec^2 z, + (2s-s^2) \rho g^2 z,}}$$

Si l'on suppose en séries, et négligeons d^3 , s^3 , $d^2 s$, $d s^2$,... nous aurons

$$dp = - \alpha (1-s) \rho g z, \frac{d\delta}{\delta_1} \left\{1 + 2\alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_1}\right)\right\} \left\{1 + \alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_1}\right) \sec^2 z, - s \rho g^2 z, \right\}$$

$$dp = - \alpha \rho g z, \frac{d\delta}{\delta_1} \left\{1 + 2\alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_1}\right) + \alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_1}\right) \sec^2 z, - s \rho g^2 z, - s \right\}$$

$$dp = - \alpha \rho g z, \frac{d\delta}{\delta_1} \left\{1 + \alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_1}\right) (\sec^2 z, + 2) - s \sec^2 z, \right\}$$

$$\frac{1}{\alpha \rho g z,} dp = - \frac{d\delta}{\delta_1} \left\{1 + \alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_1}\right) (\sec^2 z, + 2) - s \sec^2 z, \right\}$$

Intégrant

$$\frac{1}{\alpha \rho g z,} p = - \left\{ \frac{\delta}{\delta_1} + \alpha (\sec^2 z, + 2) \frac{\delta}{\delta_1} - \frac{\alpha}{2} (\sec^2 z, + 2) \frac{\delta^2}{\delta_1^2} - \frac{\sec^2 z,}{\delta_1} \int s d\delta \right\}$$

Intégrant de δ_1 à δ on a :

$$\frac{1}{\alpha \rho g z,} p = 1 + \alpha (\sec^2 z, + 2) - \frac{1}{2} \alpha (\sec^2 z, + 2) + \frac{\sec^2 z,}{\delta_1} \int s d\delta$$

$$\frac{1}{\alpha \rho g z,} p = 1 + \frac{1}{2} \alpha (\sec^2 z, + 2) + \frac{\sec^2 z,}{\delta_1} \int s d\delta$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer $\int s d\delta$. (Intégrale Paramétrique de Legendre).

Si nous prenons une atmosphère en équilibre, et que nous considérons une couche quelconque; pour descendre à l'autre couche, il faut ajouter à la pression de la couche supérieure son propre poids, qui vient augmenter la pression de la couche suivante. - Donc, dp étant l'accroissement de pression, on a

$$dp = - \rho g dr$$

(avec le signe - parce que dr est négatif quand r augmente.) - or nous avons

$$\frac{r_1}{r} = 1 - s$$

$$- \frac{r_1}{r^2} dr = - ds$$

Donc

$$dp = - \rho g \frac{r_1^2}{r} ds$$

Mais g varie, et l'on a

$$\frac{g}{g_1} = \frac{r_1^2}{r^2}$$

Donc

$$dp = - \rho g_1 r_1 ds$$

Intégrant

et, de p_1 à 0

on aura

et $s \delta$ s'annule aux deux limites de l'intégration, quand $\delta = 0$, et quand $\frac{r_1}{r} = 1$ à la surface de la Terre. - Donc

$$\int_0^{p_1} s d\delta = -\frac{p_1}{g_1 r_1}$$

et par suite

$$\frac{1}{2} \alpha g z_1 f = 1 + \frac{1}{2} \alpha (\sec^2 z_1 + 2) - \sec^2 z_1 \frac{p_1}{g_1 r_1 \delta_1}$$

Comment réduire en nombres ce dernier terme ?

Soit L_1 la hauteur d'atmosphère de densité uniforme $\rho \delta_1$, qui équilibre bien à la pression p_1 . on aura

$$p_1 = L_1 \cdot \delta_1 \cdot g_1$$

Mais

$$p_1 = 0^m,76 \times \Delta \quad (\Delta = \text{densité du Hg}).$$

Donc

$$L_1 = 0^m,760 \frac{\Delta}{\delta_1} = 0^m,760 \times 10513,15 = 8000^m$$

ce qui montre comment on peut calculer L_1 dans les circonstances normales, et par suite, dans toute autre. - Donc en général

$$L_1 = \frac{p_1}{g_1 \delta_1}$$

et le dernier terme est

$$\sec^2 z_1 \cdot \frac{L_1}{r_1}$$

on a d'ailleurs $r_1 = 6366000^m$, et $\frac{L_1}{r_1} = 0,00125$, avec $\alpha = 0,0002964$ dans les circonstances normales.

on a définitivement

$$\frac{1}{2} \alpha g z_1 f = 1 + \frac{1}{2} \alpha (\sec^2 z_1 + 2) - \frac{L_1}{r_1} \sec^2 z_1$$

Et, en remplaçant $\sec^2 z_1$ par sa valeur $1 + \alpha g^2 z_1$,

$$f = 2 \left(1 + \frac{3}{2} \alpha - \frac{L_1}{r_1} \right) \alpha g z_1 + 2 \left(\frac{1}{2} \alpha - \frac{L_1}{r_1} \right) \alpha g^3 z_1$$

En substituant les nombres précédents, qui conviennent pour les circonstances normales de température et de pression, on obtient

$$f = 60^m,67 \alpha g z_1 - 0^m,067 \alpha g^3 z_1$$

formule qui ne diffère de la précédente que pour le dernier terme, qui est très-petit dans le voisinage du zénith.

La première formule de la Réfraction,

$$f = 60'' \cdot 7 \cdot g \cdot z,$$

ne jusqu'à 55° ; et la dernière, jusqu'à 80° .

au-delà de cette limite, quand bien même on mesurerait la Réfraction avec précision, cela ne servirait guères, puisque les observations faites à ces petites hauteurs sont incertaines et peu importantes, à cause des dispersions.

La dernière formule est vraie quelle que soit la constitution de l'atmosphère. Car il n'a été fait d'autre hypothèse que celle-ci : les couches sont sphériques.

d'atmosphère reprend-elle tellement à cette hypothèse ? non, il n'y avait pas d'accidents météorologiques. - Mais les vents ne troublent guères ces résultats du calcul. Cependant, les vraies nous ont des observations, et, plus le ciel est beau, plus on se rapproche de l'atmosphère idéale que nous avons supposée.

Les variations aériennes ont lieu surtout dans les couches inférieures. Mais il y a aussi des courants supérieurs qui se croisent en différents sens, et ne troublent guères les couches d'où il y a des hauteurs très-différentes.

Notre hypothèse d'une atmosphère en équilibre est donc suffisamment approchée de la vérité.

Bien qu'à la rigueur, l'astronomie puisse se faire avec des Tables de Réfraction allant jusqu'à 80° seulement, il est bon de voir si l'on ne pourrait pas étendre la formule au-delà de cette limite.

Si l'on avait employé du Terme du 3^e ordre dans le calcul précédent, on trouverait pour le Terme suivant de la valeur de df :

$$-\frac{3}{4} \alpha s^2 g^2 z, \frac{d^2 f}{ds^2}$$

C'est le Terme qu'il faudrait intégrer pour donner plus loin la formule. Mais on ne peut le faire si l'on ne connaît pas $f = f(s)$, c.à.d. la constitution de l'atmosphère.

Le Terme est nécessairement très-petit. Il n'est donc pas indispensable de connaître très-exactement $f(s)$, et nous allons chercher pour l'instant la loi qui approche le plus de la loi réelle.

Voici ce qui se trouve dans Laplace, dont les Tables de Réfraction sont les plus employées.

Si nous admettons la loi de Mariotte, pure et simple, avec une température uniforme, $f(s)$ serait simple : on aurait

$$\frac{p}{p_1} = \frac{f}{f_1}$$

et en différentiant

$$dp = \frac{p_1}{f_1} df$$

donc on a

$$dp = -g \cdot ds, \quad \frac{r_1}{r} = 1 - s, \quad -\frac{r_1}{r^2} dr = -ds, \quad \text{donc } dp = -g \cdot \frac{r^2}{r_1} ds, \quad \frac{g}{g_1} = \frac{r_1^2}{r^2}$$

$$dp = -g_1 \cdot r_1 \cdot ds$$

donc l'on trouve

$$\frac{p_1}{f_1} df = -\int g_1 \cdot r_1 \cdot ds$$

$$\frac{df}{f} = -\frac{\int g_1 \cdot r_1 \cdot ds}{p_1}$$

Intégrant :

$$\log S = - \frac{q_1 r_1 d_1}{p_1} s + C$$

Quand $s=0$, on a $S=d_1$. Donc $C = \log d_1$

$$\log \frac{S}{d_1} = - \frac{q_1 r_1 d_1}{p_1} s$$

$$S = d_1 e^{-\frac{q_1 r_1 d_1}{p_1} s}$$

Si cette loi était vraie, nous aurions donc S en fonction de s : on voit que si s varie en progression arithmétique, S varie en progression géométrique. Mais si on introduit cette valeur de S dans la formule de la Réfraction, elle donne pour les Réfractions horizontales des Résultats trop faibles.

Cochran essayant une autre loi, celle-ci :

$$S = d_1 (1 + \mu s)$$

(quelque chose d'autre dans ces calculs : c'est qu'il prendent les valeurs faibles). — on trouve de cette manière des Résultats trop faibles.

Pour être qu'une fonction de forme Intermédiaire satisfaisant : — la voici

$$S = d_1 (1 + As)^{-Bs}$$

A et B étant deux coefficients qu'on devra déterminer. — on pourrait tirer les $\frac{dS}{ds}$, et intégrer le troisième terme de notre formule.

Laplace n'a pas suivi tout-à-fait cette marche. — avant d'arriver à cette forme Intermédiaire de la fonction qui représente l'état de l'atmosphère, reprenons l'équation différentielle

$$d\varphi = - \frac{\frac{r_1 l_1}{r_1^2} \sin z, \frac{dl}{l}}{\sqrt{1 - \frac{r_1^2 l_1^2}{r_1^2 l_1^2} \sin^2 z}}$$

cette formule ne se trouve pas dans la Mécanique céleste, on il faut des Termes de la théorie de l'émission. — transformons-la :

$$d\varphi = - \frac{\sin z, \frac{dl}{l}}{\sqrt{\frac{r_1^2 l_1^2}{r_1^2 l_1^2} - \sin^2 z}}$$

$$d\varphi = - \frac{\sin z, \frac{dl}{l}}{\sqrt{\frac{l^2}{l_1^2} (1-s)^{-2} - \sin^2 z}}$$

Maintenant, $\frac{l}{l_1}$ est extrêmement voisin de l'unité : donc on a

$$\frac{l^2}{l_1^2} (1-s)^{-2} = \frac{l^2}{l_1^2} + \frac{l^2}{l_1^2} \cdot 2s$$

en négligeant seulement le terme du 2^e ordre : et de même, on peut simplifier le $\frac{l^2}{l_1^2} \cdot 2s$ par $2s$, en négligeant une quantité plus petite que $2s \cdot \frac{1}{(1,000244)^2}$ on aura alors

$$d\varphi = - \frac{\sin z, \frac{dl}{l}}{\sqrt{-1 + \frac{l^2}{l_1^2} + 2s + \cos^2 z}}$$

Ci qui, pour les mêmes transformations que précédemment, peut s'écrire :

$$df = - \frac{\alpha \frac{d\delta}{d_1} \sin z_1}{\{1 - 2\alpha(1 - \frac{\delta}{d_1})\} \sqrt{\cos^2 z_1 - 2\alpha(1 - \frac{\delta}{d_1}) + 2\beta}}$$

Si on y a encore introduit le remplacement pour le Radical $1 - 2\alpha(1 - \frac{\delta}{d_1})$ pour la moyenne des valeurs extrêmes que prend cette expression, c.à.d. pour $1 - \alpha$: alors

$$df = - \frac{\alpha \frac{d\delta}{d_1} \sin z_1}{(1 - \alpha) \sqrt{\cos^2 z_1 - 2\alpha(1 - \frac{\delta}{d_1}) + 2\beta}}$$

Pour continuer maintenant les calculs, écrivons

$$- 2\alpha(1 - \frac{\delta}{d_1}) + 2\beta = 2y$$

donc

$$df = - \frac{\alpha \frac{d\delta}{d_1} \sin z_1}{(1 - \alpha) \sqrt{\cos^2 z_1 + 2y}}$$

Et imaginons qu'on ait

$$\delta = \delta_1 (1 + my) e^{-ky}$$

on différentie

$$\frac{d\delta}{d_1} = (-k - mky + m) e^{-ky} dy$$

et par suite

$$df = \frac{\alpha \sin z_1 (k + mky - m) e^{-ky} dy}{(1 - \alpha) \sqrt{\cos^2 z_1 + 2y}}$$

Introduisons une nouvelle variable pour faire disparaître le Radical au dénominateur. Posons

$$\cos^2 z_1 + 2y = \frac{2}{k} t^2$$

donc

$$dy = \frac{2}{k} t dt$$

et

$$y = \frac{1}{k} t^2 - \frac{1}{2} \cos^2 z_1$$

Il vient

$$df = \frac{\alpha \sin z_1}{1 - \alpha} \cdot \left(k + m t^2 - \frac{1}{2} m k \cos^2 z_1 - m \right) \cdot \frac{1}{t \sqrt{\frac{2}{k}}} \cdot e^{-t^2 + \frac{1}{2} k \cos^2 z_1} \cdot \frac{2}{k} t dt$$

Simplifiant :

$$df = e^{\frac{1}{2} k \cos^2 z_1} \cdot \frac{\alpha \sin z_1}{1 - \alpha} \cdot \sqrt{\frac{2}{k}} \cdot \left\{ k + m t^2 - \frac{1}{2} m k \cos^2 z_1 - m \right\} e^{-t^2} dt$$

Posant

$$Q = e^{\frac{i}{2} K \cos^2 z_1} \cdot \frac{2 \sin z_1}{1-2} \sqrt{\frac{1}{K}}$$

Il vient

$$\frac{1}{Q} dQ = \left\{ K + mt^2 - \frac{1}{2} m K \cos^2 z_1 - m \right\} e^{-t^2} dt$$

Intégrant

$$\frac{1}{Q} \int = \left(K - \frac{1}{2} m K \cos^2 z_1 - m \right) \int e^{-t^2} dt + m \int t^2 e^{-t^2} dt$$

Intégrons pour simplifier cette dernière expression

$$\int t^2 e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} \int -2 e^{-t^2} t dt \times t = -\frac{t}{2} e^{-t^2} + \frac{1}{2} \int e^{-t^2} dt$$

alors on aura

$$\frac{1}{Q} \int = \left(K - \frac{1}{2} m K \cos^2 z_1 - m \right) \int e^{-t^2} dt - \frac{1}{2} m t e^{-t^2} + \frac{1}{2} m \int e^{-t^2} dt$$

$$\frac{1}{Q} \int = \left(K - \frac{1}{2} m K \cos^2 z_1 - \frac{1}{2} m \right) \int e^{-t^2} dt - \frac{1}{2} m t e^{-t^2}$$

Quelle sont les limites de l'intégration, depuis la valeur où $\delta = \delta_1$ jusqu'à celle où $\delta = 0$? - on a

$$\delta = \delta_1 (1 + my) e^{-Ky}$$

1. $\delta = \delta_1$, $(1 + my) e^{-Ky} = 1$: donc $y = 0$.2. $\delta = 0$, $(1 + my) e^{-Ky} = 0$: donc $y = \infty$.

Ainsi, on a pour

$$t = \sqrt{\frac{1}{2} K \cos^2 z_1 + \frac{y}{K}}$$

Donc

$$y = 0, \quad t = \sqrt{\frac{1}{2} K \cos^2 z_1} = T; \quad y = \infty, \quad t = \infty$$

Donc

$$\frac{1}{Q} \int = \left(K - \frac{1}{2} m K \cos^2 z_1 - \frac{1}{2} m \right) \int_T^\infty e^{-t^2} dt + \frac{1}{2} m T e^{-T^2}$$

Celle est la loi de la Réfraction nommée par Laplace. - Elle implique le calcul d'une transcendante. - on pose

$$\int_T^\infty e^{-t^2} dt = e^{-T^2} \psi(T)$$

et l'on a enfin

$$\int = \sqrt{\frac{2}{K}} \cdot \frac{2 \sin z_1}{1-2} \left\{ K - \frac{1}{2} m K \cos^2 z_1 - m T^2 \right\} \psi(T) + \frac{1}{2} \frac{m \sin z_1 \cos z_1}{1-2}$$

Les valeurs de $\psi(T)$ se trouvent dans les Tables de Réfraction de Bessel.

Il y a deux coefficients, k et m , qu'il faut déterminer. - Pour cela, on calcule au moyen de la loi admise la pression totale P de l'atmosphère. on égale cette expression à 760 mm. de la même première relation. - La seconde se donne la valeur de la réfraction horizontale, qu'on peut donner par l'expérience, et que donne la formule, qui ne devient pas infinie, mais bien

$$R = \frac{v}{1-v} \sqrt{\frac{2}{k}} \left\{ k - \frac{1}{2}m \right\} \psi(0)$$

il n'y a d'inconvenant que le $\psi(0)$. - or on a

$$\psi(0) = \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

et la seconde Equation qui servira à déterminer k et m .

Substituant ces valeurs et celles de α dans la formule, on arrive à cette expression qui se trouve dans la Mécanique Céleste, à très-peu près avec les mêmes valeurs:

$$p = 2790'',157 \left\{ 0,75479 - 0,49042 T^2 \right\} \sin z, \frac{2}{\sqrt{\pi}} \psi(T) + 10021'',343 \sin z, \cos z,$$

C'est cette formule qu'on a réduite en Tables pour $z = 0^\circ, 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \dots$ la valeur numérique de T est

$$T = 25,962 \cos z,$$

Enfin, pour calculer $\psi(T)$, il faudrait procéder par séries:

$$\psi(T) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} - \left\{ T - \frac{1}{2} \frac{T^3}{3} + \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{T^5}{5} - \dots \right\}$$

car

$$\int_T^\infty e^{-t^2} dt = \int_0^\infty e^{-t^2} dt - \int_0^T e^{-t^2} dt$$

la première intégrale est $\frac{1}{2} \sqrt{\pi}$: la seconde se trouve aisément si l'on développe e^{-t^2} en séries.

Comment peut-on contrôler les Résultats de ce calcul par l'observation? et comment peut-on perfectionner la connaissance des Constantes qui y entrent?

On nous a complètement négligé l'humidité de l'air. La vapeur d'eau n'est entrée en rien dans nos raisonnements, et nous avons pris le pouvoir Réfringent de l'air sec. Cependant, il y a accord. cela tient à ce que, si la vapeur d'eau est plus Réfringente que l'air ($\frac{1}{10}$ en plus), sa densité est moindre. la compensation n'est pourtant pas absolue; mais il serait difficile d'en tenir compte, et on néglige cette cause d'erreur. - ainsi, pour avoir la correction applicable à une distance donnée, on note le

Thermomètre et le Baromètre, d'un lieu Constat les deux Constantes: mais
 jamais on ne Regarde l'Hygromètre. - Il faudrait cependant le faire, si l'on
 voulait Étudier sérieusement les phénomènes de Réfraction qui ont lieu près
 de l'horizon: cela n'a pas encore été fait.

Mais nous ne venons qu'à faire observer des Réfractions horizontales,
 après de calculer k et m .

on a d'ailleurs pour cela au mouvement diurne des Étoiles. - Soit la
 Sphère céleste, et oz la verticale. - Il suppose que o se
 place au centre de la Terre ou à celui du Soleil: il
 en Résultera 1^o d'erreur, ou plus: que sera-ce donc
 si nous ne sortons pas de la Terre, et si nous observons
 de la surface au lieu d'observer de son centre! Nous
 point o sera concentrique la Terre.

L'étoile S est déterminée par sa Distance Zenithale
 et son azimut.

Soit z , la Distance Zenithale apparente, et
 \bar{z} " " " vraie.

on aura

$$z_1 + p = \bar{z}.$$

Nous venons de trouver p par des Relations Géométriques.

Si le mouvement diurne n'existant pas, voici comment il faudrait faire:
 Soient deux Étoiles c et c' dans une même verticale, dont on mesure les Distances
 Zenithales. Si ces deux Étoiles sont assez près du Zenith, la formule

$$p = 60'' \sqrt{2z},$$

suffira. - Pour observer les Réfractions à l'horizon, il faut voyager sur la
 Terre jusqu'à ce que c soit à l'horizon: carra une grande Réfraction, et
 c' une faible. on observera la Distance des deux Étoiles. En la comparant à la
 première Distance, on aura la Réfraction à l'horizon.

C'est ainsi que fit Cassini quand il construisit les premières Tables de
 Réfraction parallèles. Il envoya Richer à Cayenne après de l'Angle de Meridien,
 et de plusieurs mesures des Distances d'étoiles dans différentes circonstances de
 hauteur. - on fut satisfait à cette époque du Rayon de réfraction ainsi obtenu.

Cette époque n'est pas Éloignée: et c'est une garantie de bonne foi que les
 deux Relations des Étoiles observées par l'abbé Lacaille ou par les Français qui
 ont été observées au Cap de Bonne Esp. sont les mêmes qu'en Europe.

Nous venons maintenant comment on tient compte du mouvement diurne.
 La Rotation se fait autour d'un axe oz qui peut toujours supposer passant
 par l'œil de l'observateur. - Soit oz cet axe.

Soient c, k deux Étoiles au passage Supérieur;

" \bar{c}, \bar{k} en " " Inférieur: (rotation égale).

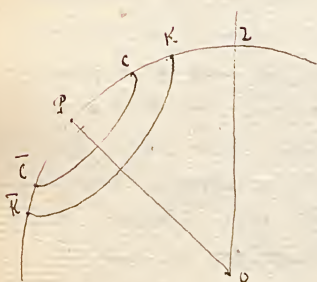
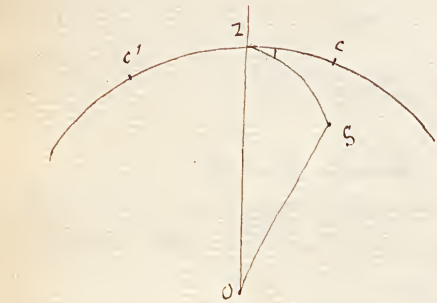
Si $cz = z_1$, la Dist. Zenith. vraie est $z_1 + p$

$\bar{c}\bar{z} = \bar{z}_1$, " " " $\bar{z}_1 + \bar{p}$

on a

$$\frac{1}{2} (z_1 + p + \bar{z}_1 + \bar{p}) = z\bar{z} = \lambda$$

λ est connu. - p et \bar{p} seront calculés par les formules, ou bien
 il faudra les trouver comme des inconnues quand les Tables seront
 jugées insuffisantes. - d'où l'on tire la formule (pour les Étoiles circumpolaires)



$$f = 60'', 7 \text{ } \varphi g z,$$

on pose

$$60'', 7 = \frac{\lambda}{\rho_{m''}} = \frac{\lambda-1}{\rho_{m''}} \quad \dots \quad \lambda = 0,0002944.$$

Mais cette constante λ répond à l'air sec. Il faudrait, pour l'état actuel de l'atmosphère, lui faire subir certaines corrections. - Pour corriger cette constante λ si elle y a lieu, il faut l'introduire dans nos formules. - Il vient

$$z_1 + \lambda \varphi g z_1 + \bar{z}_1 + \lambda \varphi g \bar{z}_1 = 2\lambda$$

Cela fait deux inconnues. - on aura une seconde équation avec une autre lettre z_2 et \bar{z}_2 :

$$z_2 + \lambda \varphi g z_2 + \bar{z}_2 + \lambda \varphi g \bar{z}_2 = 2\lambda$$

on ne le donne pas à deux équations. on ne forme un grand nombre, qu'on traite par la méthode des moindres carrés.

Pour montrer comment on traite ces questions, écrivons ainsi

$$z_1 + \bar{z}_1 = 2\lambda + (-\varphi g z_1 - \varphi g \bar{z}_1) \lambda$$

ou

$$B = 2\lambda + A \lambda$$

de même

$$B' = 2\lambda + A' \lambda$$

$$B'' = 2\lambda + A'' \lambda$$

et

on forme ainsi des centaines d'équations. Soit n leur nombre. ajoutant, on a

$$(1) \quad \frac{1}{n} \sum B = 2\lambda + \frac{\sum A}{n} \lambda$$

Retenant la première successivement à toutes les autres :

$$B' - B = (A' - A) \lambda$$

ou

$$b = a \lambda$$

de même

$$b' = a' \lambda$$

$$b'' = a'' \lambda$$

...

Multiplier la 1^{re} par a , la 2^e par a' , ... et ajoutons :

$$(2) \quad \sum ab = \lambda \sum a^2$$

Les eq. (1) et (2) sont bien plus précises que deux eq. les premières. - donc λ .

C'est tout ce qu'on peut faire. on ne peut jamais passer inconnues de quantités déjà connues à peu près. on ne peut guère trouver que les petites corrections qu'elles doivent subir. - Ici on prendra $d\lambda$: $\lambda = 60'', 7$. La vraie valeur de λ , sera $\lambda + d\lambda$. L'avantage est que, dans le calcul des équations, il n'est plus besoin de passer aussi loin le calcul des coefficients, puisque les inconnues sont petites. - on mettrait alors, en développant :

$$z_1 + \lambda \varphi g z_1 + \bar{z}_1 + \lambda \varphi g \bar{z}_1 = 2\lambda + A d\lambda.$$

Calculons $d\lambda$ d'après :

$$d\lambda = -0,0000005$$

donc

$$\lambda + d\lambda = 0,0002939$$

Dans la formule de Laplace, il y a encore deux coefficients, m et h , entrant dans la formule qui représente la densité de l'atmosphère.

$$S = S_1 (1 + my) e^{-Ky}$$

ou

$$y = s - s_1 \left(1 - \frac{S}{S_1}\right)$$

on en déduit la Réfraction à l'horizon, et le poids de l'atmosphère. - On en déduit donc à déterminer par l'expérience cette Réfraction à l'horizon, R . - Je pourrais prendre pour cela une Étoile qui passe à l'horizon, comme α de la Lyre ou α de Persée (à Paris). - Une Étoile qui semble passer à l'horizon de l'autre en réalité est l'un des d'une quantité R . - on a alors

$$z_1 + p + z_2 + R = 2\lambda$$

or, dans nos climats, p est très-petit. Car si une Étoile passe à l'horizon à son passage inférieur, elle passe près du zénith à son passage supérieur. p est donc pour la valeur $60''$, 792 . - On en déduit R .

à l'aide de ces deux Seules données, la formule de Laplace se trouve réduite en nombre, et prend la forme connue.

C'est là tout ce qu'on a emprunté à l'observation. - Voici quelques nombres qui montrent l'exactitude de la formule:

$$t = 0 \quad b = 0'' 760$$

80°	5' 32"	$\pm 0'' 9$
85°	10' 14"	$\pm 2''$
88°	19' 6"	$\pm 8''$
88° 30'	21' 54"	$\pm 17''$
89°	25' 19"	$\pm 27''$
89° 30'	29' 39"	$\pm 20''$
90°	35' 6"	

Je suis, quand bien même les formules seraient exactes, cela ne servirait à rien, car les Étoiles alors pourraient sans forme de spectre: on ne sait sur quoi compter.

C'est le Soleil qu'on observe à l'horizon pour déterminer la Réfraction horizontale. - Mais, comme il ne passe pas à l'horizon dans nos climats, il faut suivre d'autres méthodes. - La forme bizarre de cet astre, ses dentelures, montrent qu'il n'y a pas moyen de faire une Étoile de la Réfraction à l'horizon. des phénomènes de mirage, très-communs les matins, sont jusqu'à présent des objets qui ne sont pas à l'horizon, et à leur donner des positions barométriques. - on a vu le Soleil se dédoubler, avoir une seconde image au-dessus de lui, et, par là, quel Soleil vrai s'élevait, l'autre semble se lever.

Voilà donc de côté toute prétention à étudier le phénomène sous son aspect.

on peut au moins essayer d'adapter nos formules à des Étoiles voisines de l'atmosphère.

α , k , me paraissent avec la densité de l'air. - on peut admettre que α est proportionnel à la densité. - alors, si α correspond à $b = 0'' 760$ et $t = 0$, sa valeur générale est

$$\alpha = \frac{b}{760} \cdot \frac{1}{1 + 0,000366 t}$$

immédiatement avoir t ? le baromètre ne donne pas la vraie température de l'air.

Si nous en plaçons un en dehors d'une salle, nous aurons la température de l'air, plus élevée du rayonnement du sol, des murs et du ciel. — on pourrroit bien s'instrumenter avec des thermomètres, mais cela ne suffit pas. — on pourrroit alors avoir un résultat moyen en faisant arriver le rayonnement extérieur d'un air après d'oxygène d'une salle.

Est-il donc possible de parler d'exactitude en astronomie, quand on voit de la part d'un corps cette agression de la réfraction qui ne répond qu'à un certain état moyen de l'atmosphère? — Mais on peut concevoir que l'atmosphère n'est l'écart de cet état moyen que tantôt dans un sens et tantôt dans l'autre; on fait alors la somme et l'on prend la moyenne — les petites variations s'annulent pour période. Il en résulte que si l'on prend la moyenne des observations astronomiques faites pendant toute l'année, les causes perturbatrices seront annulées.

on a ainsi 35 étoiles fondamentales qu'on observe, et auxquelles on compare les autres étoiles, de manière à éliminer les effets de la réfraction.

Historique de la Réfraction. —

Depuis Laplace, un travail remarquable sur la Réfraction a été fait en allemand par Bessel. — la partie analytique est celle de Laplace. Mais la loi de constitution de l'atmosphère est différente. Bessel a pris

$$\delta = \delta_0 e^{-k s}$$

Les résultats sont très-sensiblement Exactes, en sorte que l'on s'accorde entre les deux tables, de Laplace et de Bessel. — cette loi est fondée sur celle de Mariotte. Seulement, comme la température n'est pas la même à toutes les hauteurs, il a fallu déterminer la pour l'observation.

Malgré les différences un peu vicieuses de Bessel sur la constitution de l'atmosphère, ses tables sont excellentes, et adoptées pour toute l'Europe, excepté pour nous.

En astronomie, Ivory, qui a fondé sa théorie de la Réfraction sur la

$$\delta = \delta_0 (1 + m s + n s^2)$$

a aussi donné de bonnes tables.

Il n'y a de différences entre ces trois théories qu'à l'égard de l'observation, et encore, elles ne sont pas très-grandes.

Il seroit intéressant, à l'aide de ces formules, de vouloir calculer la hauteur de l'atmosphère. — cette hauteur n'est pas connue dans les Réfractaires.

Nouvellement Barométriques.

Il n'y a pas besoin cette fois-ci de connaître la loi de constitution de l'atmosphère dans toute son étendue, mais seulement jusqu'à 8000 m au plus: et même les formules qui vont suivre ne seront pas très exactes pour les hauteurs voisines de 8000 m.

Si nous prenons bien

$$\rho = \rho_0 e^{-kz}$$

Enfin, comme cette loi suppose la température constante, il faudrait y introduire cette condition que la température décroît suivant une loi connue. — Les mesures en ballon, et celles qu'on a faites sur les montagnes élevées, montrent que la température décroît d'environ 1° par 180 m.

Si donc P est d'une quantité dr , le poids de la colonne qui aurait dr pour épaisseur serait $g \rho dr$. Donc

$$dp = -g \rho dr$$

Pour

$$\rho = \frac{p}{kz}$$

p étant la pression, z étant la hauteur de la colonne, qui est une fonction de r , et k un coefficient.

$$k \frac{dp}{p} = -g \frac{dr}{z}$$

$$k L p = -g \int \frac{dr}{z}$$

En vertu de ce

$$\frac{g}{g_1} = \frac{r_1^2}{(r_1 + h)^2} \quad dr = dh$$

$$\frac{g}{g_1} = \frac{1}{(1 + \frac{h}{r_1})^2} = 1 - \frac{2h}{r_1}$$

Donc

$$k L p = -g_1 \int \frac{1 - \frac{2h}{r_1}}{z} dh$$

Envisons

$$(1 - \frac{2h}{r_1}) dh = dh' \quad \text{donc} \quad h - \frac{h^2}{r_1} = h'$$

Il vient

$$k L p = -g_1 \int \frac{dh'}{z}$$

Voici maintenant l'artifice. — Substituons à z une fonction de h convenable, et qui permette d'intégrer le Calcul.

Supposons que la valeur d'une colonne pourrait être représentée par

$$z = m (1 - nh')$$

ce qui n'est pas loin de la loi empirique que nous venons d'annoncer: car, en négligeant les puissances supérieures, on a

$$z = m - \frac{1}{2} mn h$$

ce qui montre bien que z décrit une progression arithmétique quand y croît de la même manière.

on aura donc

$$K d.p = -g_1 \int \frac{dh'}{m(1-nh')^{\frac{1}{2}}}$$

Cette intégrale s'obtient aisément: car

$$d(1-nh')^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} n (1-nh')^{-\frac{1}{2}}$$

d'où

$$K d.p = \frac{2g_1}{mn} (1-nh')^{\frac{1}{2}}$$

$$K d.p = \frac{2g_1}{mn} \cdot \frac{z}{m} = \frac{2g_1}{m^2 n} z$$

Il s'agit d'intégrer entre les deux limites où nous opérons, c.à.d. Depuis la couche où la pression est p_0 jusqu'à celle où elle est p_1 .

$$K d.p = \frac{2g_1}{m^2 n} z$$

$$K d.p_1 = \frac{2g_1}{m^2 n} m$$

car $h' = 0$ à la station inférieure où la pression est p_0 . - d'où

$$K d.p \frac{p_1}{p} = \frac{2g_1}{m^2 n} (m-z)$$

$$K d.p \frac{p_1}{p} = \frac{2g_1}{m^2 n} \cdot \frac{m^2 - z^2}{m+z}$$

or, De $z = m(1-nh')^{\frac{1}{2}}$ on tire $z^2 - m^2 = -mn h'$. Par conséquent

$$K d.p \frac{p_1}{p} = 2g_1 \frac{h'}{m+z}$$

Résolvant par rapport à h' :

$$h' = \frac{K}{2g_1} (m+z) \log \frac{p_1}{p}$$

C'est la vraie Formule. - z est la Compositive De la couche Supérieure, m celle De la couche Inférieure.

Si l'atmosphère n'est qu'une seule couche de hauteur l , nous posons

$$z = l + t$$

l étant la hauteur correspondante à la glace fondante, nous aurons

$$m = l + t$$

Il faut déterminer l . - on a

$$p = Sh(l+t)$$

Si $t = 0$:

$$p_0 = Shl$$

Si la température croît de 1° , la pression croît de 0,00366.

$$0,00366 \text{ po} = \delta k l \cdot \frac{1}{l}$$

$$0,00366 = \frac{1}{l}$$

On peut d'après cela écrire

$$h' = \frac{k l}{g_1} \left(1 + \frac{t+t_1}{2l}\right) \log. \frac{p_1}{p}$$

Ramon, comme pour ses travaux barométriques, a trouvé que le facteur $\frac{k l}{g_1}$ étoit égal à 18336 m: en sorte que

$$h' = 18336 \text{ m} \left(1 + 0,00366 \cdot \frac{t+t_1}{2}\right) \log. \frac{p_1}{p}$$

Si nous veut avoir l'effet du Nivèlement de la gravité, on arrive à la formule

$$h = 18336 \text{ m} \left(1 + 0,00366 \cdot \frac{t+t_1}{2}\right) z \log. \frac{b_1 z^2}{b}$$

où

$$z = \left(1 + \frac{h}{r_1}\right)$$

Il faut enfin remarquer que g_1 varie avec la latitude de la Station et que l'on a

$$g_1 = g (1 + 0,00284 \sin 2\lambda)$$

ce qui conduit à

$$h = 18336 \text{ m} \left(1 + 0,00366 \cdot \frac{t+t_1}{2}\right) z \log. \frac{b_1 z^2}{b} (1 + 0,00284 \sin 2\lambda)$$

Voir le Tableau Du Bureau des Longitudes.

on peut réduire cette formule en série, et l'on arrive à la formule tri-temps

$$h = 32 \text{ m} (t+t_1+500) \frac{b_1-b}{b_1+b}$$

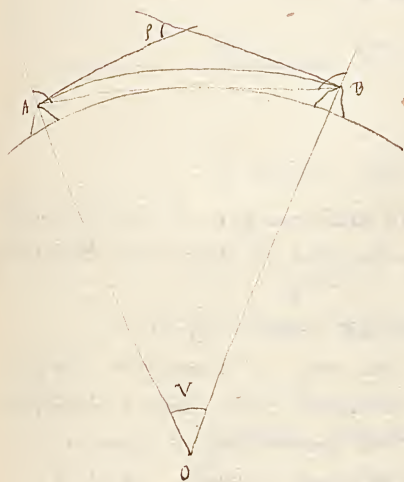
faute à retrouver, et exact jusqu'à 2000 m. -- Pour la détermination de la pression, on remarque que

$$\log. \frac{b_1}{b} = \log. \frac{1+x}{1-x} = 2x + 2 \frac{x^3}{3} + 2 \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$x = \frac{b_1-b}{b_1+b}$$

négligeant les termes en x^3 , x^5 , ... et substituant, on arrive à la dernière formule, où l'on a supposé $\lambda = 45^\circ$.

Réfractions Géodésiques.



Théorème I.

La Réfraction Totale, ou l'angle des Deux Tangentes
extrêmes, est une certaine fonction de l'angle au centre,
et est proportionnelle à cet angle.

$$f \approx \frac{8}{100} V$$

Théorème II.

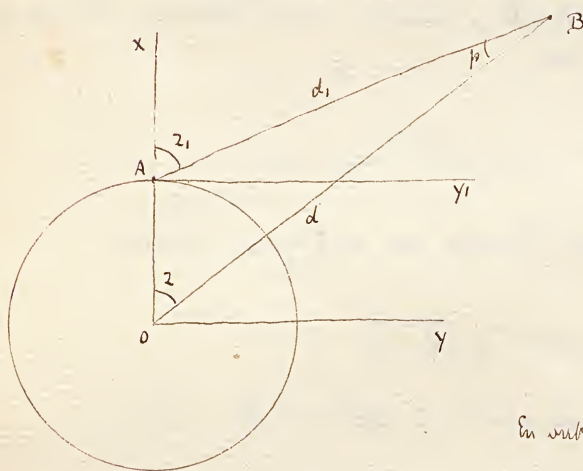
La Réfraction en B est égale à la Réfraction en A.

Cela revient à supposer que la trajectoire est une arc
de cercle.

Continuons les questions relatives aux courbes géométriques.

Parallèles terrestres.

Tous les nombres donnés par les Algèbres astronomiques et les Ephémérides se rapportent au centre de la Terre, car on ne fait pas en sorte les observations en la mer ni s'en servent.



Il faut chercher z_1 de z .

Pour cela, on transporte l'origine du centre de la Terre à la surface. Nous commencerons B par ses coordonnées polaires d et z .
On a

$$\begin{cases} x = d \cos z \\ y = d \sin z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = d_1 \cos z_1 \\ y' = d_1 \sin z_1 \end{cases}$$

En outre

$$\begin{cases} x' = x - r \\ y' = y \end{cases}$$

Eliminant x et y on trouve :

$$\begin{cases} d \cos z - r = d_1 \cos z_1 & (1) \\ d \sin z = d_1 \sin z_1 & (2) \end{cases}$$

ce qu'on suppose, c'est $z_1 - z$, car c'est une petite quantité, dont le calcul est plus facile.

Multiphions (1) par $\cos z$, (2) par $\sin z$ et ajoutons :

$$d_1 \cos(z_1 - z) = d - r \cos z$$

Multiphions (1) par $\sin z$, (2) par $\cos z$, et retranchons la même chose :

$$d_1 \sin(z_1 - z) = r \sin z$$

Donc

$$\tan(z_1 - z) = \tan p = \frac{r \sin z}{d - r \cos z}$$

ou bien encore

$$\tan(z_1 - z) = \tan p = \frac{\frac{r}{d} \sin z}{1 - \frac{r}{d} \cos z}$$

formule qui est plus commode pour l'écrire en série. - $\frac{r}{d} = \frac{1}{2500}$ pour \odot et $\frac{r}{d} = \frac{1}{60}$ pour \odot .
La parallaxe est donc exprimée au moyen de α .

On peut se proposer, inversement, de trouver les observations faites à la Surface De la Terre à celles que l'on ferait Du Centre. - Pour cela, nous écrivons

$$d, \sin(z, -z) = r \sin z$$

Remplaçons $\sin z$ par sa valeur vraie de

$$d \sin z \approx d, \sin z,$$

Il vient alors, d, disparaissant

$$\sin(z, -z) = \frac{r}{d} \sin z,$$

Quand il s'agit De la Lune, on est obligé De faire attention à ceci, que la Terre n'est pas sphérique, et que l'observateur ne passe pas par le Centre.

Remarquons maintenant la signification Du coefficient $\frac{r}{d}$. - Soit ω la parallaxe horizontale. on a

$$\frac{r}{d} = \sin \omega.$$

Il en résulte que, si d est connu, on peut calculer ω , et par suite toutes les valeurs De la parallaxe pour les divers astéroïdes.

Si on connaît ω et connu, d s'ensuit. C'est pour cette quantité que les distances interviennent en Astronomie.

Les marins trouvent Dans les Tables les diverses valeurs De p pour le Soleil et la Lune.

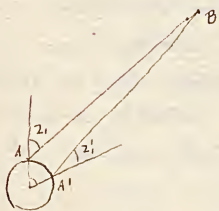
Pour le Soleil, on a en moyenne $\omega = 8'', 57$. - La parallaxe De la Lune est bien plus considérable.

Comment déterminer $\omega = 8'', 57$? ce qui revient à trouver la distance Du Soleil à la Terre.

C'est un problème De trigonométrie plane. - Supposons D'abord ce cas simple: Deux observateurs A et A' sont situés sur une même méridienne, et observent au même instant les distances z et z' . - Égalité D'une planète quand elle passe au méridien. Les deux mesures, z , et z' , rapprochées l'une De l'autre, donnent la parallaxe.

Comment agit-on en astronomie ? Les mesures vraies sont faussées: or les erreurs De Réfraction sont bien différentes à l'est, ainsi que les erreurs D'observation.

Si se présente un procédé général pour éliminer ces erreurs. on observe la distance zénithale d'une étoile très-voisine De la planète. - ainsi, supposons qu'on veuille déterminer la distance De Mars à la Terre. on prend une étoile De comparaison, très-voisine, De sorte qu'il n'y ait qu'un très-petit laps De temps entre les deux observations De distances zénithales. Il n'y a pas De parallaxe pour l'étoile, ou du moins, elle est De l'ordre De l'erreur D'observation.



Lacaille au Cap (Latitude $123^{\circ} 55'$)

$$Z_1 = 25^{\circ} 0' \quad Z_1 - Z = 1' 21'', 8 \quad (\text{après la corr. de Refr.})$$

Norgerstén à Stockholm (Latitude $39^{\circ} 39'$)

$$Z'_1 = 64^{\circ} 14' \quad Z'_1 - Z'_1 = 1' 57'', 7$$

$$\text{Diff.} = 31'', 9$$

Mesurent mille à Mars tout à l'infini.

Substituons, on trouve

$$\sin \bar{\omega} = \frac{r}{d} = \sin 23'', 6$$

Mars varie de distance énormément: ainsi d'écarter de cette équation ne se rapproche qu'à cet instant

$$d = 8740 r.$$

Je dis que en fait d'écarter de la distance de l'écarter. En effet, nous avons dit, à l'occasion du problème de parallaxe annuelle, que nous ne pourrions trouver que

$$\frac{R}{d} = \frac{\text{Dist. de } \odot \text{ à } \bar{\omega}}{\text{Dist. de } \bar{\omega} \text{ à } \odot}$$

or les tables de Mars nous donnent en effet, à l'époque de l'observation de Lacaille,

$$d = 0,4327 R$$

Donc

$$R = 40398 r$$

Il y a une erreur dans ces observations faites il y a 100 ans. - on en déduirait pour le \odot , $\frac{R}{d} = \sin \bar{\omega} = \sin 10''$: cela fait $1''$ de l'erreur. - Maintenant, les Anglais de Greenwich et du Cap ont trouvé $9''$. - cela donne une grande différence sur R .

au lieu de Mars, on peut employer Vénus. Ce sont les deux seules planètes dont on puisse se servir pour déterminer R . Cela tient à ce qu'elles donnent des parallaxes sensibles. - Pour Vénus, à la même époque, on a trouvé une parallaxe de $10''$, en sorte que, jusqu'au commencement de ce siècle, on a cru que la parallaxe du Soleil ne devait pas différer beaucoup de $10''$. - Cependant, il y a des cas plus ou moins favorables pour faire ces observations, et nous les discuterons complètement plus tard. Nous indiquons seulement le phénomène qui a paru le plus favorable pour déterminer la parallaxe de Vénus, et par suite, celle du Soleil. - on choisit l'instant où Vénus est à son nord, et à une conjonction inférieure: ce sont du époque des Français. on voit Vénus se projeter sur le Soleil, et au lieu de λ du nord, on prend le Sud.

On a trouvé pour le \odot

$$\bar{\omega} = 4'', 17 \quad \pm 0'', 037$$

Donc

$$\sin 8'', 17 = \frac{r}{d} = 8'', 17 \sin 1'' = 8'', 17 \cdot \frac{1}{206265}$$

$$d = 24068 r.$$

Voici la variation qui peut résulter de l'incertitude $0,037$. On a

$$d = \frac{206265}{9,57} r$$

$$d.d = \pm \frac{206265}{(9,57)^2} r d. 8,57$$

$$= \pm \frac{206265}{(9,57)^2} r. 0,037$$

$$d.d = d. \frac{0,037}{9,57} = \frac{1}{214} d \text{ à peu près.}$$

Cette très petite différence sur d , conclue du passage de Venus, répond à $\pm 110 r$.
Donc $d = (24064 \pm 110) r$. — C'est une incertitude assez grande.
Pour la Lune

$$\omega = 57' 2''$$

d'incertitude est de $1''$ au moins. Cependant, cela ne fait pas 10 lignes.

En astronomie, on n'a jamais besoin de ces différences exactes, mais seulement de leurs rapports. Il faut donc admettre plutôt sous le point de vue spéculatif la précision avec laquelle on se obtient ces distances : l'exactitude plus grande encore du rapport est plus remarquable. $0,04$, c'est plus de 4 fois.

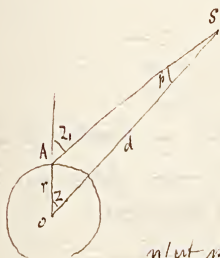
La suite de ce cours n'a pas été à ma disposition.
Mlle.

astronomie et Géodésie..

Extraits du cours de Géodésie de l'Ecole Polytechnique 1852-1853.
par M. S. Prange.

W. S. Prange

Sur la Parallaxe.



La formule Connue

$$\sin p = \frac{r}{d} \sin z, \quad (1)$$

étant pour la Petite Écriture.
on a encore

$$p = z, -z.$$

Donc

$$\sin z_1 = \sin(p+z) = \sin p \cos z + \cos p \sin z$$

remplaçant $\sin z$, par sa valeur, on a

$$\frac{d}{r} \sin p = \sin p \cos z + \cos p \sin z$$

Donc

$$d \cos p = r \cos z \cos p + r \sin z$$

$$\cos p = \frac{r \sin z}{d - r \cos z} \quad (2).$$

Cette formule (2) répond à 3 cas principaux :

1°. on connaît pour le calcul le z d'un astre, et l'on veut en déduire le p , qu'on devra observer à la surface de la Terre.

2°. Réduction au Centre de la Station, en Géodésie ;

3°. Effet de l'excentricité dans les Cercles Divisés.

Cette formule (2) peut se développer en série. - on remplace pour cela $\sin p$, $\cos p$, $\sin z$ & $\cos z$ par leurs expressions en exponentielles imaginaires : on pose $\alpha = \frac{r}{d}$; et, après quelques réductions fort simples, il vient

$$e^{2p\sqrt{-1}} = \frac{1 - \alpha e^{-2z\sqrt{-1}}}{1 - \alpha e^{2z\sqrt{-1}}}$$

Prenant les Logarithmes Neper et d'unités, et développant en série aux deux membres :

$$p = -\alpha \frac{e^{-2z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} - \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{e^{-2z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} - \dots$$

$$+ \alpha \frac{e^{2z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{e^{2z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} + \dots$$

ce qui revient à

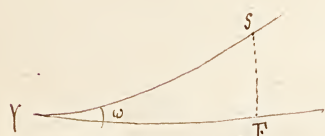
$$p = \alpha \sin z + \frac{1}{2} \alpha^2 \sin 2z + \frac{1}{3} \alpha^3 \sin 3z + \dots$$

Voici une application de ce mode de développement qui se présente souvent dans la Sphère du Soleil & des Planètes.

Réduction à l'Ecliptique.

Soyent γS l'Ecliptique et γE l'Equateur, ω l'obliquité de l'Equateur, S la position du Soleil à un instant donné; γS est la longitude L , et γE son ascension droite Al .
La relation entre ces deux coordonnées est

$$\operatorname{Tg} Al = \operatorname{Cos} \omega \operatorname{Tg} L.$$



or il est aisé d'en dériver $\operatorname{Tg} (Al - L)$ en fonction de L , et, comme cette fonction peut prendre la même forme que celle de $\operatorname{Tg} p$ en z (p. 271), le même développement en série pourra s'appliquer.
En effet, écrivons avec des symboles plus généraux

$$\operatorname{Tg} y = m \operatorname{Tg} x$$

D'où

$$\operatorname{Tg} (y-x) = \frac{\operatorname{Tg} y - \operatorname{Tg} x}{1 + \operatorname{Tg} y \operatorname{Tg} x} = \frac{(m-1) \operatorname{Tg} x}{1 + m \operatorname{Tg}^2 x} = \frac{(m-1) \sin x \cos x}{\cos^2 x + m \sin^2 x}$$

$$\text{or on a } \sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x); \text{ donc}$$

$$\operatorname{Tg} (y-x) = \frac{\frac{m-1}{m+1} \sin 2x}{1 - \frac{m-1}{m+1} \cos 2x}$$

D'où (voir la p. précédente)

$$y-x = \frac{m-1}{m+1} \sin 2x + \frac{1}{2} \left(\frac{m-1}{m+1} \right)^2 \sin 4x + \frac{1}{3} \left(\frac{m-1}{m+1} \right)^3 \sin 6x + \dots$$

Pour revenir à la réduction à l'Ecliptique, il suffit de poser

$$m = \operatorname{Cos} \omega, \quad \text{et} \quad \frac{m-1}{m+1} = \frac{\operatorname{Cos} \omega - 1}{\operatorname{Cos} \omega + 1} = -\operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} \omega.$$

Il vient alors

$$Al - L = -\operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} \omega \sin 2L + \frac{1}{2} \operatorname{Tg}^4 \frac{1}{2} \omega \sin 4L - \frac{1}{3} \operatorname{Tg}^6 \frac{1}{2} \omega \sin 6L + \dots$$

Formules où les arcs figurent en même temps
que leurs sinus, tangentes, etc.

Il y a là une précaution à prendre, c'est de tout rapporter à la même Unité:
or les arcs sont exprimés en parties de la Circonférence, & les sin., tg. etc. le sont en parties
du Rayon. — Il suffit de connaître le Rapport de ces Unités.

$$\text{arc } 1'' = \frac{2\pi r}{1296000} = \frac{1}{206265} \pi$$

Réciproquement, $r = 206265 \cdot \text{arc } 1''$.

Remarque que $\text{arc } 1'' = \sin 1''$ sensiblement.

Pour exprimer un arc en parties du Rayon, multipliez le nombre de secondes qu'il con-

tient par $\frac{1}{206265} = \sin 1''$.

Pour exprimer en secondes un arc donné en parties du Rayon, multipliez-le par $206265 = \frac{1}{\sin 1''}$.

Par ex. pour Calculer la série

$$p = x \sin x + \frac{1}{2} x^3 \sin 2x + \dots$$

où x est abstrait, & p un arc qu'on desire avoir en secondes, écrivrez

$$p = 206265'' x \sin x + \frac{1}{2} 206265'' x^3 \sin 2x + \dots$$

ou

$$p = x \frac{\sin x}{\sin 1''} + \frac{1}{2} x^3 \frac{\sin 2x}{\sin 1''} + \dots$$

De même, pour Calculer $\sin x$ par la série connue

$$\sin x = x - \frac{1}{2.3} x^3 + \frac{1}{2.3.4.5} x^5 - \dots$$

on écrira

$$\sin x = \frac{x}{206265} - \frac{1}{2.3} \left(\frac{x}{206265} \right)^3 + \dots$$

ou

$$\sin x = x \sin 1'' - \frac{1}{2.3} (x \sin 1'')^3 + \dots$$

x étant donné en secondes.

$$(I) \quad \begin{cases} \cos \beta = \cos \omega \cos \delta - \sin \omega \sin \delta \sin A & (1) \\ \sin \beta \sin L = \sin \omega \cos \delta + \cos \omega \sin \delta \sin A & (2) \\ \sin \beta \cos L = \sin \delta \cos A & (3) \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} \cos \delta = \cos \omega \cos \beta + \sin \omega \sin \beta \sin L & (4) \\ -\sin \delta \sin A = \sin \omega \cos \beta - \cos \omega \sin \beta \sin L & (5) \\ \sin \delta \cos A = \sin \beta \cos L & (6) \end{cases}$$

Pour le Soleil, $\beta = 90^\circ$: on Relations deviennent donc

$$(III) \quad \begin{cases} \cos \omega \cos \delta \sin A = 1 & (7) \\ \cos A = \cos \omega \cos L & (8) \\ \cos \delta = \sin \omega \sin L & (9) \end{cases}$$

Mouvements du \odot dans son orbite.

Hypothèse Circulaire.

Soit L_0 la longitude à l'instant pris pour origine. La longitude à l'époque t , comptée en jours, sera

$$L = L_0 + \frac{360^\circ}{T} t = L_0 + nt$$

T est l'année tropique. — n est le mouvement diurne du \odot en longitude, ou l'accroissement de cette longitude au bout d'un jour sidéral:

$$n = \frac{1296000''}{366,2422} = 58' 58'',64$$

Une observation suffit pour déterminer L_0 . on trouverait ainsi:

$$L_0 = 280^\circ 46' 36''$$

La date correspondante, origine du temps, étant le commencement de 1870. — à cela, il faut joindre la valeur de ω

$$\omega = 23^\circ 27' 32''$$

Cette hypothèse est inadmissible. — erreur de $1^\circ 55'$

Hypothèse de l'excentrique.

Lois de Kepler. — Mouvement Elliptique.

Au deux premiers lois, on ajoute (5) d'après le 2^e principe de Newton

$$\frac{S}{T^2} = \frac{\pi a^3 \sqrt{1-e^2}}{T^2} \quad \text{et} \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(L-\omega)}$$

$L-\omega$ est ici l'anomalie vraie: soit la longitude comptée à partir du Périgée.

Le problème que Kepler a dû résoudre est de calculer $L-\omega$ et r pour une

Dans quelconque t . - La Solution Consiste à Introduire un angle auxiliaire E (anomalie excentrique), donné par la Relation

$$E - e \sin E = L_0 + nt - \omega = \text{Anomalie moyenne.}$$

on trouve alors aisément

$$r = 1 - e \cos E$$

$$\lg \frac{1}{2} (L - \omega) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \lg \frac{1}{2} E$$

Cette Solution s'applique et encore employée pour les planètes survenant à l'éclat et pour les Comètes dont l'orbite est elliptique.

Mais quand il s'agit des Tables astronomiques des Planètes antiques, on a besoin des développements en série procédant suivant les puissances croissantes de e , et suivant les sinus ou les cosinus des multiples successifs de l'anomalie moyenne $L_0 + nt - \omega$. Les séries sont alors très convergentes, parce que les excentricités des orbites des grandes planètes sont très faibles.

En différentiant la 1^{re} Equation, on trouve

$$ds = \frac{1}{2} r^2 dL = \frac{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{T} dt$$

Éliminer r , et poser $\frac{2\pi}{T} = n =$ moyen mouvement. Diviser la 0 en Longitude, il vient

$$\frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{\{1+e \cos(L-\omega)\}^2} dL = n dt = d.nt$$

après avoir développé $d.nt$ en série procédant suivant les puissances des cosinus de $L-\omega$ et remplacé celles-ci par les cos. des multiples de $L-\omega$, on pourra intégrer et obtenir nt , ou, avec la constante, $L_0 + nt - \omega$, en série de sinus des multiples de $L-\omega$. Puis, par le Réciproque des Sinus (Méthode des Coefficients Indéterminés et des Différentiations Successives), on aura $L-\omega$ développé en série suivant les sinus de l'anomalie moyenne $L_0 + nt - \omega$.

on procédera de même pour le développement de r ou de $\lg r$ suivant les cosinus du même argument. - Cette méthode est très simple quand il s'agit d'obtenir la trois ou quatre premiers termes de ces séries. - Elle nous donne

$$L = L_0 + nt + 2e \sin(L_0 + nt - \omega) + \frac{5}{4} e^2 \sin 2(L_0 + nt - \omega)$$

$$\lg r.p. r = \frac{1}{2} e^2 - e \cos(L_0 + nt - \omega) - \frac{3}{4} e^2 \cos 2(L_0 + nt - \omega)$$

Ce qui suffit pour l'orbite solaire. - quand il s'agit d'orbites plus excentriques, il faut pousser beaucoup plus loin ces développements, et dans ce cas, la méthode précédente devient trop pénible. on trouvera dans la Mécanique Céleste d'autres méthodes plus générales et plus puissantes.

Voici les développements plus étendus de L et de r . - En faisant

$$m = L_0 + nt - \omega$$

on a

$$L = L_0 + nt + A_1 \sin m + A_2 \sin 2m + A_3 \sin 3m + \dots$$

où :

$$A_1 = 4\left(\frac{e}{2}\right) - 2\left(\frac{e}{2}\right)^3 + \frac{5}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^5 - \dots \quad A_2 = 5\left(\frac{e}{2}\right)^2 - \frac{22}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^4 + \dots$$

$$A_3 = \frac{26}{5}\left(\frac{e}{2}\right)^3 - \frac{43}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^5 + \dots \quad A_4 = \frac{103}{6}\left(\frac{e}{2}\right)^4 - \dots \quad A_5 = \frac{1097}{90}\left(\frac{e}{2}\right)^5 - \dots$$

Quant au rayon vecteur r , on a

$$\frac{r}{a} = 1 + 2\left(\frac{e}{2}\right)^2 - B_1 \cos m - B_2 \cos 2m - B_3 \cos 3m - \dots$$

$$B_1 = 2\left(\frac{e}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{e}{2}\right)^5 + \frac{5}{6}\left(\frac{e}{2}\right)^7 - \dots \quad B_2 = 2\left(\frac{e}{2}\right)^4 - \frac{16}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^6 + \dots$$

$$B_3 = 3\left(\frac{e}{2}\right)^5 - \frac{45}{4}\left(\frac{e}{2}\right)^7 + \dots \quad B_4 = \frac{16}{5}\left(\frac{e}{2}\right)^6 - \dots \quad B_5 = \frac{135}{12}\left(\frac{e}{2}\right)^7 + \dots$$

Si l'on veut calculer à 0",1 près, il faut aller jusqu'aux Termes en e^5 pour Mars, et jusqu'aux Termes en e^2 pour Mercure. Pour le \odot , les Termes en e^3 suffisent.

Énumération et Détermination des Éléments Elliptiques de l'Orbite Solaire.

- 1°. Ascension droite provisoire du Point Normal γ .
- 2°. Obliquité de l'Écliptique ω .
- 3°. Année de la Révolution Tropicale T , d'où $n = \frac{2\pi}{T}$.
- 4°. Longitude moyenne à l'origine du temps, L_0 (au 1^{er} Janvier 1850, MJD. moyen).
- 5°. Longitude du Périgée ϖ .
- 6°. Excentricité e , le demi grand axe a (Distance moyenne entre les distances apogées et périogées) étant pris pour Unité.

Il ne nous reste plus qu'à déterminer L_0 , ϖ et e . Trois observations méridiennes du \odot suffisent. Ces trois observations, faites aux Dates t, t', t'' , comptées à partir de l'origine du temps en jours Périciaux, donneront A, A' et A'' . A là on trouve les longitudes correspondantes L, L', L'' par la formule

$$\lg A = \lg L \cos \omega$$

On en formera les trois Equations suivantes, en négligeant provisoirement les Termes en e^2 , etc.

$$\left. \begin{aligned} L &= L_0 + nt + 2e \sin(L_0 + nt - \varpi) \\ L' &= L_0 + nt' + 2e \sin(L_0 + nt' - \varpi) \\ L'' &= L_0 + nt'' + 2e \sin(L_0 + nt'' - \varpi) \end{aligned} \right\}$$

Pour les résoudre, on posera

$$\left. \begin{aligned} 2e \sin(L_0 - \varpi) &= x \\ 2e \cos(L_0 - \varpi) &= y \end{aligned} \right\}$$

et l'on aura, en développant les sinus dans les 3 Equations précédentes, trois Eq. linéaires entre L_0 , x et y . On recommencera ensuite le même calcul en prenant compte cette fois des Termes en e^2 , au moyen de la valeur approchée que cette première solution aura fournie pour e .

Il faudra discuter l'Equation de condition à l'aide de la Différentielle $dL_0 = \{1 + e \cos(L_0 + nt - \varpi)\} dL_0 + 2 \sin(L_0 + nt - \varpi) de - 2e \sin(L_0 + nt - \varpi) e d\varpi$ et en conclure les Époques de l'année les plus favorables à la Détermination des Inconnues L_0 , ϖ et e .

Détermination Définitive de ces 3 Éléments à l'aide d'un Grand nombre d'observations. — Voici les Résultats : Époque 1850, 0

$$\left\{ \begin{aligned} L_0 &= 280^\circ 46' 36'',12 \\ \varpi &= 240 \quad 21 \quad 40 \\ e &= 0,0167709 = \frac{1}{60} \text{ environ.} \end{aligned} \right.$$

Remarque sur la forme presque Circulaire Del'orbite Solaire; son application comparée à celui Des méridiens Terrestres.

Détermination De la Longueur Del'année. — En comparant les valeurs L_0 ainsi obtenues à deux époques très-distinctes, 1750 et 1850 par exemple, et en tenant compte Des Circonférences parcourues, on aura le moyen moyen. Que \odot en 100 ans, et pour l'arc T on n'avec une Très-Grande Exactitude.

Il est facile maintenant De calculer les Coordonnées Écliptiques et par suite les Coordonnées Équatoriales Du \odot pour un Instant Donné. — Pour simplifier encore le calcul, on a réduit en Tableaux ces formules, ainsi que les perturbations planétaires Dont nous ne tenons pas Compte, en sorte que le calcul D'un lieu Du \odot pour une Date Donnée se trouve finalement réduit à de simples additions de nombres qu'on prend à vue Dans plusieurs Tableaux Successifs. On a en effet:

$$\text{Longitude vraie} = \text{Longitude moyenne} + \text{Eq. Du Centre} + \text{Perturbations}$$

$$L = L_0 + nt + 2e \sin (T - t - \omega) + \text{etc.} + \dots$$

Quant à l'Arc Du \odot il est égal à la Longitude plus la Réduction à l'Équateur, et la Distance solaire S s'obtient par la formule

$$\cos S = \sin \omega \sin L.$$

ou par Des Séries Équivalentes.

L'accord De cette Théorie avec les observations est Complet lorsqu'on tient Compte Des Perturbations Planétaires et Des Variations Séculaires Dont tous les Éléments, sauf le Demi-Grand-axe, sont affectés.

Temps Solaire Vrai et moyen.

Soit T la Durée Del'année Tropicale en Jours Sidéraux
 " N " " " Jours Solaires vrais.

on a

$$T = 366, 24 222$$

et

$$N = 365, 24 222$$

La Durée Du Jour moyen est donc

$$1 \text{ Jour moyen} = \frac{366^{\text{J. Sid.}} 24 222}{365, 24 222} = 1^{\text{J. Sid.}} 00 273 208 = 24^{\text{h}} 3^{\text{m}} 56^{\text{s}} 55^{\text{ms}}$$

Rem. Le Jour moyen Existe donc De 2^m environ les 24^h Du Jour Sidéral, et par suite, 6 min. De Temps moyen valent 6^m 15 De Temps Sidéral. ainsi De 6^m 6^m, une pendule De Temps moyen aura perdu une seconde par rapport à une pendule Sidérale. En D'autres termes, les deux Pendules ont leurs battements coïncés. Dant De 6^m en 6^m. D'où un moyen très-Exact Des Comparés.

Nous prendrons désormais le Jour moyen pour unité: alors

$$n = 59' 4", 33.$$

Concordance Du Temps Vrai et Du Temps moyen.

Le genre vrai est l'angle horaire du \odot vrai, exprimé en Temps.

Figure moyenne

Donc la différence.

Donc la différence de ces heures est égale à celle de ces angles horaires, et par conséquent à la différence des ascensions droites de ces deux étoiles, prise en signe contraire, car celles-ci se comptent en sens inverse des angles horaires.

Monarda pavot,

$R \otimes_{\text{vrai}} = R \otimes_{\text{moyen}} = \text{Eq. Du Centre} + \text{Reduct. : l'Equation.}$

Si nous désignons cette différence périodique, exprimée en Temps, par le nom d'Equation
Du Temps, nous aurons

Heure Moyenne - Heure vrai = Equation du Temps.

Observation Du 3^e D'une 1^{re} genre vraie; il fondra y ajouter 1^{re} G. De
Genre pour avoir 1^{re} genre moyenne correspondante.

Les Ephémérides astronomiques donnent l'Eq. du Temps calculée de jour en jour pour midi vrai : on en déduit la valeur pour une autre heure ou quelque par interpolation.

l'incertain. L'Évolution Du Temps. — Écrivez en ses Deux parties prises ensemble et séparément deviennent nulles.

Concordance Du Temps moyen et Du Temps Sidéral.

Figure littérale et planche parois du Point vernal, exprimé en Temps.

" Moyenne " " " " O moyen, " "

Donc la différence de ces figures est égale à celle des angles horaires, et par conséquent à la différence des ascensions droites, prise en ligne contraire.

Or l'AR de y est 0 et celle Du O moyen est 1,0 + int. donc

$$H_{\text{umt. m.}} = H_{\text{umt. d.}} - (I_0 + nt).$$

Observation 1. Une étoile quelconque donne l'heure sidérale; il faut en retrancher l'AR du \odot moyen, au même instant, pour avoir l'heure moyenne correspondante.

Les Ephémérides astronomiques donnent E_0 et calculé de jour en jour pour midi moyen; on en déduit par Interpolation sa valeur pour un autre instant quelconque.

Il y a une Espagne dans l'armée (voir l'équinoxe du printemps) où T_0 n'est nul. Alors, mais pour un instant quel. seulement, l'heure idéale s'accorde avec l'heure moyenne.

Durée des Jours et des Nuits.

Crepuscules - Poisons - Climats.

La durée de la présence d'un astre, dont la distance polaire est δ , sur l'épo-
-uison d'un lieu dont la latitude est λ , est égale (en négligeant la réfraction, la
courbure du globe. De 0, sur 1/4 diam. moyenn. et infini latitude. Des observations) à l'arc d'une
à AH (voir lat. g.) réduit en temps, AH étant tiré de la formule

$$\cos \alpha = \cos \lambda \cos \delta + \sin \lambda \sin \delta \cos A H$$

Dans laquelle on fait $z = 90^\circ$ et $\cos z = 0$.

Il n'y a qu'à donner cette expression pour le Soleil, dont les S varient de $90^\circ - \omega$ à $90^\circ + \omega$, et l'on aura toutes les circonstances qui régissent l'illumination diurne d'un lieu donné.

Quant aux questions relatives aux crépuscules, on fera

$$z = 90^\circ + 18^\circ \text{ ou } z = 90^\circ + 16^\circ$$

suivant l'hypothèse admise sur la hauteur à laquelle le Soleil doit se trouver au-dessus

de l'horizon pour que le crépuscule commence ou cesse.

Pour la 1^{re} formule, on voit que AH peut devenir imaginaire dans les lieux où $\lambda < \omega$ ou $> 180^\circ - \omega$, c.à.d. pour les deux zones polaires glaciales, alors le O devient momentanément circumpolaire, le lever ou le coucher de cet astre ne dépendent plus du mouvement diurne, mais des seules variations de S , c.à.d. du mouvement annuel.

Il s'agit des Saisons et du Climat, et de la quantité de chaleur diurne ou annuelle que le O verse sur un horizon donné, T faut tenir compte, et de la durée variable de la présence du O sur l'horizon, et surtout de sa hauteur moyenne. on prendra donc encore la formule connue

$$(Z) = S - \lambda$$

Cette discussion n'aboutit qu'à une théorie astronomique des Climats, dont la distribution se résumerait uniquement sur les latitudes géographiques. En fait la distribution des températures diurnes et annuelles, à la surface du globe, est principalement modifiée par d'autres conditions physiques, telles que l'altitude du lieu, et surtout la répartition des mers et des terres, les courants océaniques, les vents régnants, etc.

Théorie des Mesures.

Instruments destinés à mesurer les Coordonnées angulaires.

Lunettes astronomiques.

Comme les Lunettes astronomiques renversent les objets, il est essentiel d'en pas commettre de méprise sur ce point; on les emploie en ne consignant sur les Carnets d'observation que les apparences, telles que la lunette les donne, sans se préoccuper de les rectifier.

ainsi, quand on lit dans un recueil d'observations astronomiques ou qu'on désigne des indications de ce genre: Soleil, bord Supérieur, il s'agit du bord supérieur du disque vu dans la lunette, en sorte que l'observation se rapporte en réalité au bord inférieur du Soleil. Cette règle pratique, de toujours noter les apparences, permet d'éviter la confusion que le renversement des images pourrait sans cela introduire dans les registres d'observations.

Il est évident que le sens du mouvement propre des astres sera également renversé (en même temps que sa vitesse sera amplifiée) dans les Lunettes: à l'œil nu, il s'effectue de gauche à droite, l'observateur faisant face au Sud; on le verra donc les astres entrer par la droite dans le champ de la lunette, et le traverser de droite à gauche.

La Lentille de Crown (l'antérieure, la biconvexe) et celle de Flint (la biconcave) dont un objectif achromatique se compose ordinairement, doivent être centrées sur le même axe. Si ce centrage est défectueux, les images ne sont pas nettes; les étoiles par ex. paraissent alors allongées dans un sens. En centrant convenablement les lentilles sur un même axe de figure, on fait disparaître ce défaut Capital. Les opticiens ont pour cela des procédés fort exacts, fort liés sur l'emploi du tour.

Mais il faut se garder de confondre cet axe de figure de l'objectif avec ce que l'on nomme axe optique, ligne de visée ou ligne de Collimation.

Les Lunettes remplacent pour nous les Gnomons ou Dioptries dont les anciens se servaient pour viser aux astres, et dont on retrouve encore quelques exemplaires dans de vieux Graphomètres, ou dans l'instrument plus utile que l'on nomme Equerre d'acier. avec ces instruments-là, on mesure les angles à quelques minutes près à l'œil nu (1), tandis que l'application des lunettes aux cercles divisés permet de viser aux secondes, ou même à de très-petites fractions de seconde, la précision de ces mesures angulaires.

(1). La plus extrême perfection des mesures faites à l'œil nu ne dépend pas l'! c'est là que Tycho-Brahe était parvenu (au XVI^e Siècl), et la limite des mesures n'aurait jamais dépassé sur ce point l'exactitude de l'astronome Danois, sans l'invention des Lunettes.

Pour mesurer exactement, il faut d'abord voir nettement. Or l'œil ne peut voir à la fois avec netteté à des distances très-diverses. S'il s'accommode pour la vision nette à de grandes distances, il ne verra pas très-distinctement les choses des près de l'œil, et réciproquement. À la vérité, la vision devient plus nette quand on regarde ou touche de très-petites ouvertures, comme celles des lunettes, et l'on peut distinguer alors à peu près également bien des objets très-différemment éloignés, mais aussi on perd une grande quantité de lumière par ce mode de vision à travers des orifices plus étroits que la pupille.

Les Lunettes au contraire procurent un triple avantage qui explique la précision extraordinaire des mesures modernes :

1°. Elles amènent sur le même plan, à la même distance de l'œil, et jusqu'à la portée précise de la vision distincte, l'objet visé et le point de mire (craie des fils).

2°. Elles augmentent la puissance optique de l'œil en ce sens qu'elles font pénétrer dans cet organe, et concourir à la formation des images, une quantité de lumière plus grande que celle dont l'ouverture de la pupille permettrait l'entrée à l'œil nu.

3°. Elles amplifient les dimensions apparentes ou angulaires des objets, depuis les grossissements de 5 ou 6 fois (lunettes de sextant) jusqu'à ceux de 1000 et même de 2000 fois (lunettes astronomiques ou grandes lunettes modernes).

On discute encore sur ces questions relatives à la visibilité par les lunettes. Les Physiciens ou les astronomes ne sont pas tombés d'accord sur toutes les questions qui s'y rattachent; mais il n'y a pas d'ombre d'un doute sur l'emploi des lunettes pour définir une direction. — cette application est fondée sur l'existence d'un point appelé Centre optique de l'objectif, dont voici la propriété caractéristique.

Soit l'objet AB dont l'image produite par un objectif se forme en ab . Si l'on joint par de droites les points A, B de l'objet aux points correspondants a, b de l'image, ces droites Aa, Bb , se coupent toutes en un même point O qui porte le nom de Centre optique de l'objectif, point dont la position dépend des courbures et des indices des lentilles de cet objectif. (1)

Enfin, de là que si l'on incline diversement l'objectif en le faisant tourner autour du Centre optique O , l'image ab restera immobile. Si on le fait tourner autour d'un autre point, l'image ab se déplacera. De là on déduit un procédé pour déterminer expérimentalement la position du point O , à partir duquel doit se compter la longueur focale de l'objectif.

ainsi, en tirant une droite de l'image d'un objet au centre optique de la lunette, cette droite aboutit nécessairement à l'objet; et pour fixer cette droite, dont un point est déjà déterminé par le centre optique de l'objectif, il suffit de marquer le lieu de l'image par quelque ligne matérielle, tel

(1) Quand on casse une partie de l'objectif, on ne déforme pas les images, on gêne seulement, le centre optique subsiste. Les astronomes se servent même, quelquefois de lunettes dont l'objectif a été cassé en deux, et qu'on nomme Héliomètres, quand on sépare les deux moitiés, on les faisant glisser le long de leur section, on obtient deux images du même objet; et l'on met ces images en contact lorsqu'il s'agit de mesurer le diamètre angulaire.

qu'une croisée de fils très-fins.

On appelle axe optique d'une lunette la ligne idéale qui joint le centre optique de l'objectif à un point choisi dans le plan focal où viennent se former les images, et l'on finit là par une croisée de fils. Les fils doivent être fins au tube de la lunette, et, par un intermédiaire, invariablement reliés à l'objectif lui-même.

Pour diriger cet axe optique, cette ligne de visée ou de collimation, sur un objet quelconque, il suffit donc d'armer l'image de l'objet sur la croisée des fils du réticule, en déplaçant au besoin le tube de la lunette. Quand on fait tourner ainsi la lunette, et avec elle l'axe optique ou la ligne de visée, on fait tourner de la même quantité l'altitude qu'elle porte dans tous les instruments de mesure; les déplacements de l'altitude indiquent ceux de l'axe optique, et forment la mesure des angles parcourus par cet axe, lorsqu'on l'observe successivement dans la direction de divers objets.

En déplaçant le réticule (à l'aide de vis), on peut faire varier à volonté la position de l'axe optique de la lunette; mais il y a là une limite qu'il ne faudrait pas dépasser. La règle est de ne pas l'écarter trop de l'axe de figure de l'objectif, avec lequel il vaudrait mieux le faire coïncider, si cela était toujours possible. C'est qu'en effet l'existence d'un centre optique dans un objectif dépend de la condition que les rayons admis à former l'image focale n'aient sur l'axe de figure qu'une incidence d'un petit nombre de degrés. Si les objets s'écartaient trop de cet axe de figure, les lignes menées de ces objets à leurs images ne s'uniraient plus en un seul et même point.

Quant à l'oculaire qui suit, comme on voit, en dehors de cette théorie, il faut noter que son axe de figure coïncide avec celui de l'objectif, ou du moins ne s'en écarte pas beaucoup. Il sert uniquement à voir de plus près, comme avec une loupe, les images des objets et les fils tendus dans le plan où ces images viennent se former.

Outre les positifs et négatifs. — Exclusion de ces derniers lorsque la lunette est armée d'un réticule.

Description des divers réticules. Réticule mis pour y tendre des fils. Spécies des fils variées. Fabrication des fils de platine. Les fils fins s'adaptent à l'action des rayons solaires bien qu'ils soient tendus dans le plan où se forme l'image focale du soleil.

Comment est assurée que les fils sont bien dans le plan focal. Les images des objets très-éloignés se forment sensiblement dans le plan focal principal, où les fils se trouvent placés d'ordinaire. à quelle limite de distance un objet doit-il se trouver pour qu'on puisse compter sur cette coïncidence, dans une lunette de longueur donnée?

Mesure du champ et du grossissement.

Examen et preuve de la bonté d'une lunette sous le triple rapport de l'oculisme, de la collimation de sphéricité, et du contour, des lentilles.

Précautions à prendre pour nettoyer les verres.

Des Collimateurs. — Quand on regarde à l'œil nu dans une lunette par l'objectif, on ne voit pas son réticule. Pour le voir, il faut armer l'œil d'une autre lunette disposée pour les objets situés à l'infini. Quand deux lunettes sont ainsi pointées l'une sur l'autre de manière que l'image de la croisée des fils de l'une coïncide avec la croisée des fils de l'autre, leurs axes optiques ont la même direction: ils sont parallèles ou ils coïncident. — Dans une suite d'opérations géométriques ou astronomiques, on a besoin de définir d'une manière permanente une direction qu'on prend pour origine. Cela se fait soit au moyen d'une mire très-éloignée, soit avec un collimateur qu'on peut mettre aussi près qu'on veut.

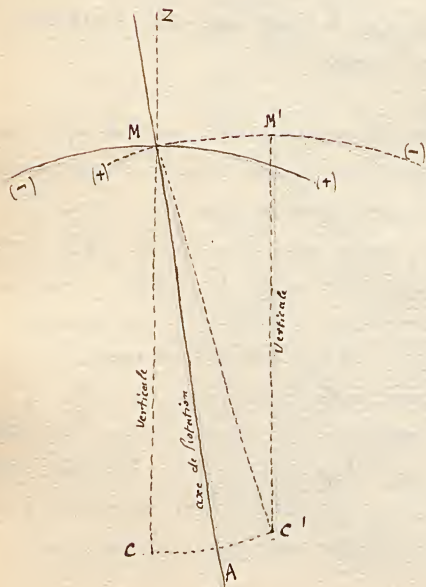
Verticalité de l'axe optique assurée par la coïncidence de la croisée des fils du réticule avec l'image de ces fils vue par réflexion dans un miroir demercure. — Considérations sur la croisée des fils comme un point lumineux qui envoie des rayons dans tous les sens (on a vu, en effet, s'illuminer fortement les fils du réticule). Le faisceau conique qui tombe sur

l'objectif et transformé par réfraction en un faisceau D , rayons parallèles entre eux et parallèles à l'axe optique. après avoir été réfléchi par la surface parfaitement plane et horizontale du bain de mercure, le faisceau cylindrique revient sur l'objectif, qui le réfracte comme s'il venait d'un point situé à l'infini. Il va donc former l'image au plan focal principal, et l'axe de ce nouveau faisceau, c'est à dire la ligne qui joint l'objectif au centre optique, a précisément la direction des rayons parallèles que le bain de mercure renvoie à l'objectif. Si les axes des deux faisceaux coïncident, c.à.d. si l'image des fils se forme sur les fils mêmes et non à côté, c'est que les axes sont perp. à la surface horizontale du miroir. — Cette curieuse propriété, dont on fait aujourd'hui un très fréquent usage, en géodésie et en astronomie, permet de déterminer avec une précision extrême la direction de la verticale, beaucoup mieux que le fil à plomb, et tout aussi bien que la niveau les plus sensibles et les mieux travaillés.

Théorie Des Niveaux.

L'axe gradué d'un niveau fait partie d'un cercle dont la grandeur est telle que la division de 1" en 1" y devient praticable, et surtout appréciable à l'œil nu. En vertu des lois de l'hydrostatique, le milieu de la bulle repose, dans chaque position du niveau, au point le plus haut du cercle, et le rayon qui aboutit à ce point est la verticale. Cette verticale n'est pas suffisamment déterminée pour le point milieu de la bulle, car l'autre point, le centre, n'est pas donné par la construction de l'appareil. aussi le niveau seul ne suffit pas, comme le fil à plomb, pour indiquer la direction de la pesanteur: il faut encore le combiner avec une opération de retournement autour d'un point dont on veut connaître la direction.

Supposons d'abord qu'il s'agisse de déterminer, à l'aide d'un niveau, l'inclinaison d'un axe de rotation à peu près vertical. Il faudra fixer le niveau à l'axe d'une façon invariable, et de manière qu'ils puissent tourner ensemble sans que le mouvement de rotation puisse rien changer dans leur position relative: et d'abord, nous admettrons qu'on ait amené le niveau, dans le plan vertical qui passe par l'axe.



Soit C le centre inconnu du niveau et M le milieu de la bulle; le rayon CM est la verticale. — Supposons encore que l'axe de rotation aboutisse précisément au point M , en faisant avec CM le triangle rectangle AMC qu'il s'agit de mesurer. Si l'on fait tourner de 180° l'appareil autour de l'axe AM , le niveau prendra une position MM' symétrique de la première; le rayon CM , d'abord vertical, prendra la position MC' , faisant avec MC un angle double de l'angle cherché. Le milieu de la bulle viendra se placer en M' , point actuellement le plus élevé du niveau, et le rayon vertical sera $C'M'$. Or il est évident que l'angle $MC'M'$ double de l'angle cherché AMC , est mesuré par l'arc MM' , dont le milieu de la bulle s'est déplacé sur le niveau.

Ordinairement, l'origine des divisions est placée au milieu du tube, et l'on compte comme positives les divisions qui précèdent dans un sens, et comme négatives les divisions du sens opposé. Pour éviter toute confusion, on grave les

Signer + et - aux deux bouts du niveau. Quelle que soit la convention, le milieu de la Bulle répond toujours à la moyenne des lectures faites aux deux bouts. Si donc on désigne par a et b ces lectures faites dans la première position, par a' et b' celles qui répondent à la seconde, on aura

$$\frac{1}{2}(a+b) = m \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(a'+b') = m'$$

pour les positions du milieu de la Bulle avant et après le retournement; l'inclinaison de l'axe sera donc mesurée par $\frac{1}{2}(m'-m)$ de ces divisions.

Pour rendre l'axe vertical, il faudra l'incliner de manière à faire marcher le milieu M de la Bulle vers M' d'une quantité égale à $\frac{1}{2}MM' = \frac{1}{2}(m'-m)$.

Si l'on convient de regarder l'inclinaison de l'axe de rotation comme positive ou négative suivant que cet axe va percer le ciel du côté marqué - ou du côté marqué + sur le niveau, dans la 1^{re} position, l'expression $\frac{1}{2}(m'-m)$ donnera non seulement l'inclinaison de l'axe, mais encore son signe.

Voici par un exemple, ainsi que la disposition adoptée pour l'inscription des observations :

	1 ^{re} Position de l'axe + à droite de l'observateur	2 ^e Position de l'axe + à gauche
Extrémités de la Bulle	$\left\{ \begin{array}{l} + 6^{\circ}, 0 \dots a \\ - 12, 3 \dots b \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} + 1^{\circ}, 3 \dots a' \\ - 17, 0 \dots b' \end{array} \right.$
$\frac{1}{2}$ Somme = m	$= - 3, 15$	$m' = - 7, 85$

Décl. ou Asc.

$$i = \frac{1}{2}(m'-m) = - 2^{\circ}, 35'$$

Le signe - indique que l'axe va percer le ciel à gauche de la verticale de l'observateur. Si une partie du niveau vaut $2^{\circ}, 15'$ par exemple, l'inclinaison i sera de $5^{\circ}, 05'$.

Pour corriger cette inclinaison, et rendre l'axe vertical, il faudrait agir sur les vis de l'axe, de manière à faire marcher le milieu de la Bulle de M vers M' d'une quantité égale à $\frac{1}{2}MM' = \frac{1}{2}(m'-m) = - 2^{\circ}, 35'$.

On rend ces opérations plus faciles en amenant l'origine des divisions (cette origine est au milieu du Cube) à coïncider avec le point M , au milieu de la Bulle, lorsque l'axe est vertical. Pour cela, il faut déplacer le niveau lui-même par rapport à l'axe de l'instrument, en agissant sur une vis du niveau. - voici la succession de ces manœuvres :

1^o. on amène à l'aide des vis de l'axe, le milieu de la Bulle au milieu des divisions ;
2^o. on retourne l'instrument de 180° autour de l'axe : si dans cette seconde position, le milieu de la Bulle coïncide encore avec l'origine des divisions, on en conclura que l'axe est horizontal. - Si au contraire le milieu de la Bulle n'est pas au milieu des divisions, on l'y ramènera en faisant faire la moitié du chemin avec les vis de l'axe et l'autre moitié avec celles du niveau.

3^o. on replace l'instrument dans sa 1^{re} position afin de vérifier le succès de l'opération. Si le milieu de la Bulle n'est pas cette fois à l'origine des divisions, l'écart sera toujours beaucoup moindre que dans le 1^{er} cas, et on le fera aisément disparaître cette fois, moitié avec les vis de l'axe, moitié avec celles du niveau.

L'application du niveau à un axe horizontal ne diffère guère de ce qui précède : c'est le niveau qu'on place sur l'axe, et qu'on retourne bout pour bout, au lieu de retourner l'axe lui-même.

Retourner ainsi le niveau revient d'ailleurs à le faire tourner de 180° autour d'une ligne normale à l'axe. C'est donc cette ligne dont on mesurera ou dont on corrigera l'inclinaison sur la verticale. - or il est évident que cet angle est précisément égal à

l'inclinaison de l'axe lui-même sur l'horizontale.

Le niveau peut servir à mesurer l'angle de deux axes que le constructeur a dû faire perpendiculaires l'un sur l'autre. On rend le 1^{er} exactement vertical, puis on mesure l'inclinaison du 2^e sur l'horizontale. - Le dernier angle est évidemment égale à l'erreur de l'instrument, c'est à dire à la différence entre l'angle des deux axes et 90°.

Valuer les parties du niveau. Différents procédés pour déterminer la valeur angulaire de ses divisions, et pour en vérifier la régularité. Le rayon de courbure du niveau se déduit de la valeur angulaire de ses divisions.

Par exemple, un niveau dont les parties vaudraient 1" et courburent 1 mm de haut-gross, aurait pour rayon

$$206265 \text{ fois } 1 \text{ mm ou } 206^m 265$$

Construction des niveaux. Niveaux sphériques. Influence de la Capillarité sur les mouvements de la bulle. on atténue cette influence en augmentant le diamètre de l'arête de la longueur de la bulle; mais, dans les grands niveaux si précis, la bulle emploie un temps considérable pour atteindre sa position d'équilibre. Influence de la température: la moindre différence de chaleur, d'un bout à l'autre du niveau, suffit pour en fausser les indications.

Théorie des Verniers.

Soit n le nombre des divisions d'un vernier appliqué à un limbe divisé; ce vernier permettra d'appécier les angles à la fraction $\frac{1}{n}$ près de la plus petite division du limbe.

Désignons en effet par D la plus petite division du limbe, et par d celle du vernier. Si le constructeur a fait

$$D - d = (n-1)D$$

il en résulte

$$D - d = \frac{1}{n} D$$

et la différence de longueur entre la division et celle du vernier est précisément la fraction que le vernier permet d'appécier. on voit qu'elle est égale à $\frac{1}{n} D$.

Par exemple, les limbes des cercles d'un théodolite de Gammey sont divisés 9, 10 et 10'; les verniers ont 60 divisions (qui en comprennent 59 du limbe); on a par conséquent:

$$n = 60 \text{ et } \frac{1}{n} D = \frac{10'}{60} = 10''$$

on peut donc, sur cet instrument, lire les angles à 10" près. - avec un peu d'attention, on peut encore aller jusqu'à la moitié de cette quantité. Car, quand les traits dont on apprécie la coïncidence ne sont pas rigoureusement en ligne droite, on consulte le trait suivant, pour lequel l'écart se manifeste déjà en leur contraire, et l'on prend la moyenne des deux lectures.

Voici maintenant la question inverse: Quelle étendue faut-il donner au vernier d'un cercle pour lire les angles avec un degré donné de précision? L'équation

$$D - d = \frac{1}{n} D$$

résout encore cette question. - Par exemple, un cercle est divisé de 20' en 20', et l'on veut que son vernier donne 15". on aura

$$D - d = 15'' = \frac{1}{n} 20'$$

donc

$$n = \frac{20'}{15''} = \frac{1200}{15} = 80$$

Il faudrait donc que l'axe du Vernier eût 80 divisions comprenant 79 divisions du limbe, c.à.d. un arc de $26^{\circ} 20'$.

Cet arc est assurément trop étendu; mais il est facile de le réduire de moitié en doublant le nombre de divisions du limbe, lesquelles vaudraient alors 160 et non 80.

Toutefois, il y a des limites qu'on ne saurait dépasser dans la pratique. ainsi, d'un côté, on ne peut multiplier indéfiniment les divisions d'un limbe, ni d'autre, augmenter trop l'écart du Vernier. Dans ce dernier cas, on arriverait bientôt à ce résultat que dans une même Région du Vernier, plusieurs traits successifs paraîtraient en coïncidence avec ceux du limbe. — Par exemple, prenons un arc précédent 2 divisions de Rayon; l'arc de $1''$ serait de $\frac{0.0002}{206265}$, ou de 0.001 environ. Or deux traits du limbe et du vernier séparés de cette distance paraîtraient nécessairement en coïncidence; il serait impossible de rendre l'écart sensible à l'œil pour la construction du Vernier. Mais $15''$ donnent 0.0015 d'écart appréciable, surtout avec une Loupe. Il est donc raisonnable d'exiger que le Vernier d'un cercle de deux Diamètres de Rayon donne immédiatement $15''$, et que l'observateur ne commette guères d'erreurs plus fortes que la moitié de cette quantité.

Excentricité des Verniers.

Tout Vernier suppose autour d'un axe que l'artiste constructeur s'est efforcé de centrer exactement sur le limbe du cercle divisé. Presque tous les Instruments présentent une petite imperfection à cet égard, et sont affectés d'une erreur d'excentricité plus ou moins forte, dont l'influence se fait sur les mesures angulaires; sera (d'après la formule de Lap. 271) représentée par la formule

$$p = \frac{\varepsilon}{d} \sin(u-\alpha) + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{d^2} \sin 2(u-\alpha) + \dots$$

u étant la lecture du cercle faite à l'aide du Vernier, ε la distance de l'axe du Vernier au centre du cercle, d le rayon du cercle, α la division à laquelle aboutit le Rayon du cercle qui passe par le centre de Rotation du Vernier. Cette quantité variable p doit être ajoutée à toutes les lectures faites sur le limbe pour avoir celles qu'on obtiendrait s'il n'y avait point d'excentricité. Ajoutons que, dans tous les Instruments bien construits, cette correction est assez petite pour pouvoir être réduite à son 1^{er} terme $\frac{\varepsilon}{d} \sin(u-\alpha)$.

Alors, il est facile de voir qu'avec un cercle entier, on peut éliminer cet effet d'excentricité du Vernier. Il suffit de mesurer le même angle sur deux Régions quelconques, mais diamétralement opposées, du limbe (1). Dans l'une, l'angle mesuré sur le limbe sera trop grand, dans l'autre, il sera trop petit de la même quantité. — Mais, pour

(1) Cette Assertion suppose que l'axe de Rotation ne glisse pas, sans quoi l'erreur d'excentricité serait variable, et ne pourrait être entièrement éliminée que par l'emploi de Verniers équidistants. Pour éviter autant que possible à ce défaut, l'artiste donne à l'axe une forme un peu conique, ainsi qu'à la douille où il tourne, et il maintient l'axe en contact permanent avec la douille à l'aide d'une sorte de ressort placé au bout de l'axe. Malgré ces précautions, le centre de Rotation n'est pas absolument fixe, car il faut toujours laisser un peu de jeu, adouci par une couche d'huile. aussi tout instrument muni d'un seul vernier (Quart de cercle, sextant, octant, Graphomètre) est-il essentiellement défectueux.

les lectures, cette double mesure est impossible, et comme c'est la source principale du défaut, il importe de la déterminer et d'en tenir compte.

Pour cela, on mesure à l'aide du sextant deux angles exactement connus, soit par exemple qu'il s'agit de la partie d'un triangle dont les côtés ont été choisis, soit parce qu'on aura déterminé les angles A et B avec un instrument exempt de toute erreur de construction.

Soient donc u, u', u'' les lectures faites sur le sextant, en sorte que $u' - u$ et $u'' - u$ soient les valeurs erronées que l'instrument assigne aux angles A et B. Les vrais angles seraient

$$u' + \frac{\epsilon}{d} \sin(u' - \alpha) - \left\{ u + \frac{\epsilon}{d} \sin(u - \alpha) \right\}$$

$$u'' + \frac{\epsilon}{d} \sin(u'' - \alpha) - \left\{ u + \frac{\epsilon}{d} \sin(u - \alpha) \right\}$$

En égalant ces deux expressions à A et B, on aura deux équations entre les deux inconnues $\frac{\epsilon}{d}$ et α . - Il sera facile de construire une table des valeurs de la fonction de l'arc connue $\frac{\epsilon}{d} \sin(u - \alpha)$ pour toutes les valeurs de l'argument u , et d'y prendre à vue les corrections qu'il faut ajouter aux lectures u de l'instrument.

Pour simplifier, j'en ai pas tenu compte d'une particularité du sextant, à savoir de ce que les angles mesurés sur le limbe ne valent en réalité qu'une moitié de ce qu'ils notent représenter. Il sera facile d'introduire cette circonstance dans le calcul.

Les cercles entiers sont bien préférables, sous tous les rapports, aux portions de cercles telles que les Octants, Sextants, Quarts de Cercle. Leur avantage est évident en ce qui regarde l'excentricité, car on peut leur donner deux verniers opposés, et faire disparaître complètement l'erreur d'excentricité, quand bien même elle serait variable.

Il est évident en effet que l'on mesure ainsi le même angle dans deux régions opposées du cercle à la fois, et que la moyenne de deux lectures est exempte de cette erreur. Nous allons démontrer cette propriété en général, pour n verniers équidistants.

Soit u la lecture faite au premier vernier; si il n'y avait point d'excentricité ni d'erreur accidentelle de lecture, la lecture faite au deuxième serait $u + \frac{2\pi}{n}$, au troisième, elle serait $u + 2 \cdot \frac{2\pi}{n}$... J'appelle $u_1 + \frac{2\pi}{n}$, $u_2 + 2 \cdot \frac{2\pi}{n}$... celles qui sont faites réellement. Désignons par e_1, e_2, e_3, \dots les erreurs accidentelles de lecture commises à chaque vernier, et par $\frac{\epsilon}{d} \sin(u - \alpha)$ l'effet actuel de l'excentricité. On aura, pour les n lectures corrigées de ces erreurs :

$$1^{\text{er}} \text{ Vernier. } u - - - + \frac{\epsilon}{d} \sin(u - \alpha) \quad \pm e_1,$$

$$2^{\text{e}} \text{ " } u_1 + \frac{2\pi}{n} + \frac{\epsilon}{d} \sin(u - \alpha + \frac{2\pi}{n}) \quad \pm e_2$$

$$3^{\text{e}} \text{ " } u_2 + 2 \cdot \frac{2\pi}{n} + \frac{\epsilon}{d} \sin(u - \alpha + 2 \cdot \frac{2\pi}{n}) \quad \pm e_3$$

⋮

$$n^{\text{e}} \text{ " } u_{n-1} + (n-1) \frac{2\pi}{n} + \frac{\epsilon}{d} \sin(u - \alpha + (n-1) \frac{2\pi}{n}) \quad \pm e_n$$

Dont la moyenne sera

$$\frac{1}{n} \sum u + \frac{1}{n} \sum_{x=0}^{x=n-1} x \frac{2\pi}{n} + \frac{1}{n} \frac{\epsilon}{d} \sum_{x=0}^{x=n-1} \sin(u - \alpha + x \frac{2\pi}{n}) + \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{x=n} \pm e_x$$

Le second terme est la somme d'une progression arithmétique, et il se réduit à

En mettant u pour u_1
dans le signe \sin , l'arc
restant est toujours le même.

$(n-1)\frac{\pi}{n}$ dont on n'a pas besoin de tenir compte, parce qu'on néglige ordinairement de lire les degrés à chaque vernier, sauf au 1^{er}, où l'on fait la lecture complète. Quant au 3^e terme, il est toujours nul, quel que soit n , à moins pourtant que n ne soit égal à 1 (cas d'un seul vernier). Donc, la correction qu'il faut appliquer à la moyenne de n verniers équidistants, afin de tenir compte de l'erreur actuelle d'excentricité, est nulle.

Le quatrième terme nous montre un second avantage dû à l'emploi de plusieurs verniers. Les erreurs accidentelles de lecture sont tantôt positives, et tantôt négatives, au hasard, comme l'indique leur nom. Elles se détruisent donc en partie dans la moyenne, en sorte que l'on a, suivant toute probabilité

$$\frac{1}{n} \sum_{x=1}^{x=n} \pm e_x < e$$

c'est-à-dire l'erreur moyenne qu'on peut commettre dans la lecture d'un vernier. L'expérience et les théories des probabilités s'accordent d'ailleurs à montrer que si $\pm e$ est l'erreur à craindre sur la lecture d'un vernier isolé, l'erreur à craindre sur la moyenne des lectures de n verniers se trouve réduite à $\pm \frac{e}{\sqrt{n}}$.

ainsi, par rapport aux erreurs accidentelles de lecture, quatre verniers donnent deux fois plus de précision qu'un seul.

Examen et vérification des verniers dans les cercles munis de deux verniers opposés. Deux défauts peuvent empêcher que les lectures faites à ces deux verniers ne soient identiques. Comment on détermine chacun d'eux isolément.

au lieu de verniers, on se sert aussi de microscopes, portés paralidade, pour observer les dernières divisions du limbe. Les microscopes, dans pouvoir amplifiant assez considérable, sont armés de réticules et de vis micrométriques. on met en emploi qu'on ne pour les grands cercles des observatoires fixes. Cependant, on les a appliqués depuis quelques années en Allemagne, avec succès, aux instruments utilisés en Géodésie. Il suffit de dire ici que la vis micrométrique fait mouvoir un des fils du réticule, et sert à amener en coïncidence avec l'image du trait du limbe le plus voisin de la ligne optique du microscope; on mesure ainsi, avec autant de facilité que d'exactitude, l'espace angulaire compris entre le zéro du vernier et le trait voisin sur le limbe. Il convient d'ajouter que les théories suivantes sur l'emploi de plusieurs verniers équidistants sont d'une application plus rigoureuse quand il s'agit de microscopes équidistants.

Cercles divisés.

L'erreur d'un trait de la division d'un limbe peut être de deux sortes: ou bien elle est accidentelle, et alors cette erreur due au hasard, ou du moins à l'imprécision tout-à-fait passagère de mille petites causes perturbatrices qui agissent momentanément sur la machine à diviser, cette erreur ne se répète plus dans les traits suivants; ou bien elle est systématique, comme l'erreur d'excentricité, et elle affectera les traits suivants d'après une certaine loi. L'erreur accidentelle de division peut être confondue avec l'erreur accidentelle de lecture, quand le vernier vient à tomber sur ce trait, et elle n'aura pas d'autre influence: cette influence se trouve atténuée proportionnellement.

à la Racine carrée du nombre des Verniers, mais jamais détruite. — Il en est tout autrement des erreurs Systématiques. Elles-ci peuvent disparaître entièrement par l'emploi d'un nombre suffisant de Verniers équidistants, et cette propriété des Verniers, base essentielle de la précision de nos mesures Angulaires, n'est pas une des moindres conséquences de quelques Théorèmes de Trigonométrie analytique que nous aurons occasion de rappeler.

Admettons, par définition, les erreurs Systématiques affectent les divisions suivant une certaine loi qui dépend évidemment de la situation de chaque trait sur le limbe, et lorsqu'on revient au même trait après avoir parcouru la circonférence entière, on retrouve évidemment la même erreur. Lors donc que l'arc sera donc exprimé par des fonctions périodiques plus ou moins complexes, dont les variables indépendantes ou les arguments ne seront autre chose que les arcs compris entre le trait considéré et certains autres traits pris pour origine. — C'est ainsi que les astronomes procèdent quand ils ajoutent aux expressions du mouvement circulaire des planètes certains Termes périodiques destinés à représenter soit les Inégalités elliptiques, soit les Perturbations produites par l'action des Planètes.

Quelles que soient, en effet, les erreurs systématiques des divisions, on pourra toujours représenter l'erreur de l'un trait quelconque u par un certain nombre k d'Arcs de la ligne suivante, laquelle procède suivant les Sinus et les Cosinus des multiples de cet arc u , ou, ce qui revient au même, suivant les Sinus des multiples d'un arc compris à partir d'origines successivement différentes. Cela revient à écrire

$$e = A_1 \sin(u - \alpha_1) + A_2 \sin 2(u - \alpha_2) + A_3 \sin 3(u - \alpha_3) + \dots + A_k \sin k(u - \alpha_k) + \dots$$

La lecture correspondante à chaque Vernier doit donc recevoir une correction de même forme, et, à la moyenne de n verniers, il faudra ajouter la série suivante:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{x=0}^{x=n-1} A_1 \sin \left\{ (u - \alpha_1) + x \frac{360^\circ}{n} \right\} \\ & + \frac{1}{n} \sum_{x=0}^{x=n-1} A_2 \sin \left\{ 2(u - \alpha_2) + x \frac{2 \cdot 360^\circ}{n} \right\} \\ & + \frac{1}{n} \sum_{x=0}^{x=n-1} A_3 \sin \left\{ 3(u - \alpha_3) + x \frac{3 \cdot 360^\circ}{n} \right\} \\ & + \dots \\ & + \frac{1}{n} \sum_{x=0}^{x=n-1} A_k \sin \left\{ k(u - \alpha_k) + x \frac{k \cdot 360^\circ}{n} \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

Pour évaluer cette expression un peu complexe, en apparence, prenons le Terme général. En développant le Sinus de la somme des deux arcs, on trouve

$$\frac{1}{n} A_k \sin k(u - \alpha_k) \sum_{x=0}^{x=n-1} \cos x \frac{k \cdot 360^\circ}{n} + \frac{1}{n} A_k \cos k(u - \alpha_k) \sum_{x=0}^{x=n-1} \sin x \frac{k \cdot 360^\circ}{n} \quad (2)$$

or le second Terme est toujours nul, et le premier l'est aussi lorsque k n'est pas un multiple de n .

Donc, dans la correction précédente (1) qu'on doit appliquer à la moyenne des lectures de n verniers, tous les Termes de la forme

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A_k \sin \left\{ k(u - \alpha_k) + x \frac{k \cdot 360^\circ}{n} \right\}$$

Dans lesquels k ne sera pas divisible par n , se trouveront annulés par exemple de n Verniers équidistants.

Mais, en revenant au Terme Général dont (2) reproduit l'expression développée, on voit que, si k est multiple de n ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos x \frac{k \cdot 360^\circ}{n}$$

se réduit à n . ainsi le Terme Général n'est pas nul dans ce cas. Il devient

$$\frac{1}{n} A_k \sin k(u - \alpha_k) \times n = A_k \sin k(u - \alpha_k)$$

qui est le Terme Général de la série dont nous serons pour représenter l'erreur de Division du Vrai u . - Donc, dans la correction (1) qui il faut appliquer à la moyenne des lectures de n Verniers équidistants, tous les termes dont le facteur $1, 2, 3, \dots k, \dots$ sera divisible par le nombre n des Verniers, subsisteront sans altération, tandis que les autres se trouveront éliminés.

Par exemple, s'il y a quatre Verniers, comme dans les Grand Cycloïdes de Gambey, les termes du 1^{er}, 2^e, 3^e, 5^e, ... ordre, c. ad.

$$A_1 \sin(u - \alpha_1) + A_2 \sin 2(u - \alpha_2) + A_3 \sin 3(u - \alpha_3) + A_5 \sin 5(u - \alpha_5) \dots$$

disparaissent de la Lecture moyenne des lectures faites aux quatre Verniers, mais non les termes

$$A_4 \sin 4(u - \alpha_4) + A_8 \sin 8(u - \alpha_8) \dots$$

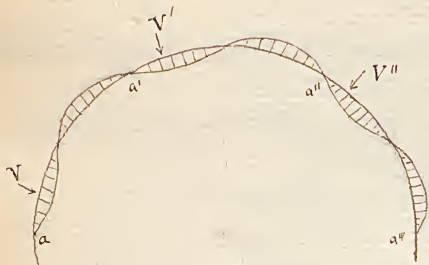
car-là ne sont point éliminés dans cette moyenne, et l'altèrent plus ou moins profondément, en raison de la grandeur des coefficients A_4, A_8, \dots

avec deux Verniers opposés seulement, tous les termes d'ordre impair disparaissent, mais tous les termes d'ordre pair subsistent.

C'est un fait d'expérience que, dans un cercle bien construit et bien divisé, où les erreurs de Division procèdent non par des sauts brusques, mais d'une manière continue, les premiers termes de la série précédente ont seuls une grandeur sensible, et que les termes d'ordre très-élevés sont négligeables. Par conséquent, un nombre assez restreint de Verniers suffit pour éliminer les erreurs de Division. C'est aussi que les astronomes mettent six Verniers (ou six microscopes équidistants) à leurs cercles, afin de n'avoir pas à s'occuper des termes des cinq premiers ordres. Celui du sixième, qui subsiste alors, est presque toujours très-petit, et même négligeable, si l'instrument est bien construit.

Pour se faire une idée nette du jeu de ces Termes pour lesquels on représente analytiquement les erreurs de Division, il est bon de les soumettre à une sorte d'interprétation géométrique. - Considérons, par ex. le terme $A_6 \sin 6(u - \alpha_6)$. La période et le sinus de la circonférence, c. ad. qu'il passe par toutes les phases du sinus quand l'arc $u - \alpha_6$ varie seulement de 60° .

Toutefois, qu'à chaque trait de la Division du cercle, on élève une petite ordonnée normale à la circonférence, pour représenter en grandeur et en sens, positif ou négatif l'erreur de ce trait. La courbe d'erreur sera une ligne ondulée analogue à une sinusoïde (voir la p. suivante) qui se reproduira six fois autour du cercle, de a en a' , puis de a' en a'' , de a'' en a''' , ... Quand un Vernier tombera en V , il faudra ajouter à la lecture qu'on y



fait du trait correspondant, la petite ordonnée de la courbe d'erreur pour corriger cette lecture. - Mais s'il y a plusieurs Verniers, on devra distinguer deux cas; leur nombre n est ou n'est pas un diviseur du nombre total des divisions périodiques de l'erreur. Dans le 1^{er} cas, représenté sur la figure, chaque Vernier V, V', V'' ... sera sur une ordonnée de même grandeur et de même signe; leur moyenne sera donc affectée de l'erreur représentée par cette ordonnée. - Dans le second cas, à chaque Vernier, la ligne de l'ordonnée varieront, et par une propriété des sinus des arcs, qui croissent ainsi en proportions arithmétiques, les ordonnées négatives compenseront exactement les

positives, et leur somme sera zéro. - Ainsi la moyenne des lectures faite à 1, 2, 3 ou 7 Verniers (quand ils se trouvent entièrement exempts de cet erreur du 6^e ordre (de la figure). Cette erreur affecterait au contraire, sans aucune réduction, la moyenne de 2, de 3 ou de 6 Verniers, tout aussi bien que la lecture d'un seul (1).

La représentation des erreurs d'un cercle divisé, par les termes de la série précédente, n'est pas une conception purement analytique. Il est facile d'indiquer certains erreurs qui procèdent en effet comme les termes du 1^{er} ordre, du 2^e ordre ... etc. ... Supposons par exemple, que le centre de ce cercle ait été mal centré par l'artiste sur la plaque de la machine à diviser; il en résultera aussitôt, pour les divisions ainsi obtenues, une erreur analogue à celle que l'excentricité de des Verniers produit dans les lectures, erreurs dont voici la loi :

$$\frac{e}{r} \sin(u-\alpha) + \frac{1}{2} \frac{e^2}{r^2} \sin 2(u-\alpha) + \frac{1}{3} \frac{e^3}{r^3} \sin 3(u-\alpha) + \dots$$

Supposons encore que l'axe autour duquel tournent les alidades et les Verniers d'un cercle fasse un angle ω avec le plan de ce cercle. Il en résultera une erreur analogue à la Réduction à l'écliptique, dont nous avons donné la formule p. 272, car les angles décrits par l'axe optique de la lunette seront mesurés par des Verniers qui se meuvent dans un autre plan. Il faudra donc ajouter alors, à la lecture de chaque Vernier, une correction de la forme

$$-Tg^2 \omega \sin 2(u-\alpha) + \frac{1}{2} Tg^4 \omega \sin 4(u-\alpha) - \dots$$

on voit que les corrections diverses sont précisément comprises dans la formule générale

$$A_1 \sin(u-\alpha_1) + A_2 \sin 2(u-\alpha_2) + A_3 \sin 3(u-\alpha_3) + \dots$$

Vérification des divisions d'un Cercle.

Lorsqu'il s'agit d'apprécier le mérite d'un Instrument, et de vérifier l'exactitude

(1) On peut cependant, avec deux Verniers, mesurer des angles de 180°; avec trois Verniers, des angles de 120°; et avec 6 ou angles de 60° etc. ... sans que ces mesures soient en rien affectées par les erreurs de divisions.

de ses divisions, il est nécessaire de déterminer les erreurs absolues d'un certain nombre de traits, afin d'en conclure ensuite, par le calcul, les erreurs systématiques de tous les autres. Le procédé qu'il faut suivre pour cela offre le double avantage de donner une idée assez nette des meilleurs moyens que les artistes aient imaginés pour diviser leurs cercles, & de faire connaître une méthode dont nous aurons à parler plus tard, celle de la Répétition.

Le procédé consiste à mesurer successivement, avec toutes les positions de l'index, un même angle qui soit à très-peu près une partie aliquote de la circonférence, 30° par ex. Placez le vernier sur 0° , et dirigez la lunette (qui entraine alors le vernier fixé au limbe et le limbe lui-même) sur un objet bien défini, tel qu'une mire ou un collimateur; puis fixez le limbe, rendez la lunette et l'alidade libres, amenez le vernier à-peu-près sur 30° , et faites plusieurs autres, dans la direction actuelle de l'axe optique, un objet ou un nouveau collimateur. L'angle véritable des deux objets sera $30^\circ + x$, x étant une très-petite quantité inconnue. à la vérité, le cercle donnera une mesure de cet angle, mais une mesure affectée d'une erreur également inconnue du trait de 30° . Je s'agit donc d'abord de déterminer cet angle $30^\circ + x$ indépendamment des erreurs de division, puis, en comparant sa valeur exacte à la valeur fournie par le cercle, on obtiendra aussitôt l'erreur du trait de 30° . — Pour cela, recommencez la mesure du même angle en prenant cette fois pour point de départ la position qu'avait le vernier à la fin de l'opération précédente: vous arriverez ainsi au trait de 60° . Une 3^e mesure amènera le trait de 90° , et après trois opérations de ce genre, où l'angle $30^\circ + x$ aura été ajouté 11 fois à lui-même, le vernier sera revenu à très-peu près au trait initial de la division, puisque x est supposé très-petit. admettons que les lectures faites à chaque mesure soient:

$$\begin{array}{ll} 1^{\text{re}} & 30^\circ + a_1 \\ 2^{\text{e}} & 30^\circ + a_2 \\ 3^{\text{e}} & 30^\circ + a_3 \\ & \dots \end{array}$$

$$12^{\text{e}} \dots 30^\circ + a_{12}$$

à la 12^e opération, on a évidemment 12 fois l'angle cherché, et cela, indépendamment de toute erreur de division, car le trait 0° , par lequel on a commencé, est le même que le trait 360° , par lequel on finit (1). — De la relation:

$$360^\circ + a_{12} - (0^\circ + a_1) = 12(30^\circ + x)$$

on se tirera la valeur de l'inconnue $x = \frac{1}{12}(a_{12} - a_1)$. — En nommant $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{11}$ les erreurs des 11 traits, ou les petites corrections qu'il faut ajouter aux lectures correspondantes à ces 11 traits, on obtiendra les valeurs par les relations

$$30^\circ + a_1 + \varepsilon_1 = 30^\circ + x$$

$$60^\circ + a_2 + \varepsilon_2 = 2(30^\circ + x)$$

$$90^\circ + a_3 + \varepsilon_3 = 3(30^\circ + x)$$

$$\dots \dots \dots 360^\circ + a_{11} + \varepsilon_{11} = 11(30^\circ + x)$$

lesquelles sont connues $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ c.à.d. les erreurs relatives au 1^{er} trait 0° ou 360° , pour lequel l'erreur est nulle. Enfin, si l'on veut déterminer, à l'aide de ces valeurs, un certain nombre de constantes dans l'expression générale des erreurs,

$$E = A_1 \sin(u - \alpha_1) + A_2 \sin 2(u - \alpha_2) + \dots$$

il suffira d'y substituer, à la place des variables ε et u , leurs valeurs numériques obtenues par les opérations précédentes, et, après avoir développé les $\sin(u - \alpha_1), \sin 2(u - \alpha_2), \dots$

(1) Une note rigoureuse que il n'est pas de microscopie ou de verniers.

Je forme les Différences suivantes

$$E_1 = x_1 \sin 30^\circ - y_1 \cos 30^\circ + x_2 \sin 2.30^\circ - y_2 \cos 2.30^\circ + x_3 \sin 3.30^\circ - y_3 \cos 3.30^\circ + \dots$$

$$E_2 = x_1 \sin 60^\circ - y_1 \cos 60^\circ + x_2 \sin 2.60^\circ - y_2 \cos 2.60^\circ + x_3 \sin 3.60^\circ - y_3 \cos 3.60^\circ + \dots$$

$$E_n = x_1 \sin 330^\circ - y_1 \cos 330^\circ + x_2 \sin 2.330^\circ - y_2 \cos 2.330^\circ + x_3 \sin 3.330^\circ - y_3 \cos 3.330^\circ + \dots$$

où l'on a posé pour simplifier

$$A_1 \cos \alpha_1 = x_1$$

$$A_1 \sin \alpha_1 = y_1$$

$$A_2 \cos 2\alpha_2 = x_2$$

$$A_2 \sin 2\alpha_2 = y_2$$

$$A_3 \cos 3\alpha_3 = x_3$$

$$A_3 \sin 3\alpha_3 = y_3$$

On n'a pas tenu compte, dans cette discussion, des erreurs de lecture aux verniers, et des erreurs de pointé sur les deux miroirs qui déterminent l'angle de $30^\circ + x$, parce que l'observateur et maître d'atténuer presque indistinctement ces erreurs en prenant pour chaque quantité à mesurer la moyenne d'un grand nombre de mesures indépendantes.

au fond, cette méthode réduit au procédé très élémentaire que l'on a toujours employé pour partager, avec le compas, un arc donné en un nombre quelconque de parties égales. Presque toujours, l'extrême précision s'obtient avec les moyens les plus simples, combinés sagement.

Mesure des Angles.

C'est tout que par une discussion détaillée du Causse d'erreur que l'on peut espérer de reconnaître les conditions auxquelles il faut satisfaire pour atteindre un degré donné de précision.

Pour mesurer l'angle compris entre deux objets A et B, on commence par fixer solidement, à l'aide d'une pince, le cercle alidade, et par suite la lunette, au cercle divisé; puis on fait tourner ensemble les deux cercles autour de l'axe propre du cercle divisé, jusqu'à ce que l'axe optique de la lunette soit dirigé exactement vers le point A. Dans cette position de l'instrument, on lit fixe d'une manière invariable, et on lit les verniers dont la moyenne est u . - Le 1^{er} ensemble d'observations comporte trois erreurs:

1^{re}. L'erreur accidentelle p du pointé; elle est d'environ $\pm 2''$ pour les lunettes dont on se sert en Géodésie, et qui grossissent de 20 à 30 fois.

2^{re}. L'erreur accidentelle de lecture du Vernier. Si chaque Vernier donne immédiatement 10'', on peut lire les indications à 5'' près, et, en supposant le vernier dont on prend la moyenne, l'erreur à craindre se trouve réduite à $\pm \frac{5''}{\sqrt{n}} = \pm 2''$.

3^{re}. L'erreur de Division d. celle-ci est de nature complexe: car elle comprend, comme nous avons vu, l'erreur accidentelle, non régulière de chaque trait, et son erreur systématique. L'emploi de 4 verniers équidistants élimine toujours la forme la plus importante de cette dernière, et nous verrons plus loin comment on peut espérer de la faire disparaître en combinant convenablement un certain nombre d'observations du même angle. En attendant, que nous admettions que l'erreur de Division peut encore aller à 5'' pour la moyenne de 4 verniers d'un cercle géodésique.

La dernière opération consiste à détacher le cercle alidade ou la lunette qui se trouvait précédemment fixée au cercle divisé, puis à amener l'axe optique dans la direction du second objet B. alors, on s'occupe de nouveau la pièce destinée à fixer la lunette au cercle divisé, et l'en achève, si cela est nécessaire, de régulariser le point de l'axe d'une vis de rappel à mouvement microscopique. on lit de nouveau les Verniers, dont la moyenne u , sera entachée plus ou moins de trois erreurs précédentes, en sorte que la lecture vraie serait

$$u, \pm p, \pm l, \pm d,$$

l'angle ainsi mesuré sera $u, -u$, tandis que la vraie valeur serait

$$u, \pm p, \pm l, \pm d, - (u \pm p \pm l \pm d).$$

Or, quand il s'agit d'erreurs systématiques dont on connaît l'avis ainsi que les constantes numériques qui entrent dans l'expression de cette loi, il est aisé d'en tenir compte par un calcul rigoureux; mais quand il s'agit d'erreurs accidentelles indépendantes les unes des autres, qui se produisent au hasard, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, sans être assujetties à aucune autre condition que de ne pas dépasser une certaine limite assignable, alors il devient impossible d'en corriger les observations. Tout ce que l'on peut faire, c'est d'apprécier, d'une manière plus ou moins probable, l'influence qu'elles exercent sur le résultat définitif. La discussion de ces erreurs est donc du ressort de la théorie du probabilité.

Dans toutes ces discussions, on peut se former une idée de cette influence en admettant que, dans une mesure donnée, toutes les erreurs conspirent ensemble au lieu de se détruire mutuellement, au moins en partie, par l'opposition de leurs signes. on trouverait ainsi 19" pour la somme de ces erreurs accidentelles, mais on sent bien que cette accumulation possible d'erreurs n'est pas plus probable que leur complète destruction mutuelle, et nous nous bornons à estimer à 9" l'erreur définitive que l'on peut craindre, en moyenne, dans la mesure de l'angle avec les instruments dont nous parlons ici.

Mais ce degré de précision serait bien insuffisant pour les besoins de la Géodésie; dans les grandes triangulations, il est nécessaire d'obtenir un angle à 1" ou même à 0", 1 près, et l'on s'attache aisément qu'on y est parvenu en employant même de petits instruments portatifs. — En effet, quand on a mesuré les trois angles d'un triangle géodésique, il se présente une vérification facile: la somme des 3 angles doit faire 180°, lorsqu'on a retranché de chacun d'eux le tiers de l'arc sphérique. or, dans les dernières triangulations françaises, cette somme ne différait guère de 180° que de 1" à 2" en moyenne. Il faut pour cela que les angles aient été mesurés non pas à 9", ni avec des erreurs possibles de 19" mais à 0", 1 près.

Il a donc fallu résoudre ce problème: avec un instrument qui ne donne les angles qu'à 9" près, par une seule mesure, déterminer les angles avec une précision 10 fois plus grande. Il est présent deux méthodes, celle de la répétition et celle de la réitération. (1)

(1). on augmente aussi la précision de mesure en augmentant les dimensions des instruments. C'est ce que font les astronomes. au lieu de cercles de 0^m, 25 de diamètre, ils emploient des cercles de 2^m, au lieu de petites lunettes de 0^m, 3 grossissant 20 ou 30 fois, ils

Méthode de la Répétition.

Elle consiste à recommencer la même mesure un certain nombre de fois, mais en changeant chaque fois, sur le limbe divisé, le point de départ de l'angle mesuré, c'est-à-dire la première lecture u , afin de ne pas retomber sur les mêmes erreurs de Division (1). La moyenne de ces diverses mesures est plus exacte, évidemment, qu'une mesure unique, et l'on admet, soit en vertu de considérations théoriques, soit comme un résultat d'expérience, que la précision de cette moyenne croît, non pas comme le nombre des mesures faites, mais du moins comme la Racine carrée de ce nombre.

L'erreur à craindre, au bout de 10, de 100, de 1000 mesures ainsi faites, se trouverait donc réduite successivement de $9''$ à $2''$, $8''$ à $0''$, $9''$ à $0''$, $28''$ (2).

Il y a plus, en choisissant pour origine de chaque mesure des points équidistants de la circonférence, on parvient à éliminer complètement les erreurs systématiques de la Division que le petit nombre des Verniers laisse encore subsister en partie.

ainsi, dans une série de 10 mesures du même angle faites avec un seul vernier, on prendra successivement pour origine u de $u + u$, les divisions

$$0^\circ \quad 36^\circ \quad 72^\circ \quad \dots \quad 324^\circ.$$

On voit les 9 premiers termes de la série qui représentent les erreurs de Division se trouveront annulés dans la moyenne des 10 mesures, et il en sera de même de tous les termes dont le chiffre d'ordre n'est pas un multiple de 10.

Si le cercle est muni de deux Verniers opposés, on prendra pour origine

$$0^\circ \quad 18^\circ \quad 36^\circ \quad \dots \quad 162^\circ$$

ou, ce qui revient au même,

$$u, \quad u+18^\circ, \quad u+36^\circ, \quad \dots \quad u+162^\circ.$$

et l'on éliminera ainsi tous les termes de la série sous le 20° , le 40° , etc.

Enfin, si le Cercle a 4 Verniers, la moyenne de 10 mesures dont les points de départ seraient

$$u, \quad u+9^\circ, \quad u+18^\circ, \quad \dots \quad u+81^\circ$$

ne sera affectée que des erreurs exprimées par les termes du 40° , du 80° , ordre. et il faudrait que le cercle fût bien mal divisé pour qu'une élimination aussi large restât insuffisante.

on voit de 2 ou 3^m qui grossissent de 150 à 250 fois; au lieu de deux ou de 4 verniers équidistants, ils en mettent 6 à leurs cercles. — aussi mesurent-ils les angles du 1^{er} coup, à quel-ques dixièmes de seconde près. Mais on comprend que ces grands instruments ne servaient servir aux opérations géodésiques.

(1) Pour cela, il faut que l'instrument présente une disposition particulière dont il sera question plus loin.

(2) Il ne faudrait pas s'imaginer que cette réduction des erreurs peut être poussée au-delà de toute limite. Elle est essentiellement fondée sur l'hypothèse que les seules erreurs des mesures sont des erreurs accidentelles: or il n'en est jamais ainsi en toute rigueur dans la réalité. Il existe probablement toujours de petites erreurs systématiques dues à des causes inconnues, mais constantes, et ces erreurs-là ne sont nullement atténuées dans la proportion susdite, par la Répétition des mesures.

Le premier cas, celui d'un seul Vernier, n'a été cité pour mémoire: il peut être exclu, car cette disposition donne prise à un défaut grave, à savoir, la variabilité de l'erreur d'excentricité. Cette variabilité a lieu dans tous les cercles; mais son influence disparaît quand on emploie plusieurs Verniers équidistants, si l'on a soin de lire ces verniers dans la position même où le point à être fait.

Celle est la méthode de la Répétition, la seule que les Astronomes emploient, la seule aussi que l'on doit employer au Goniomètre, du moins pour la mesure des angles verticaux (nous verrons bientôt quelle distinction profonde il faut établir, dans la pratique, entre la mesure des angles verticaux et celle des angles horizontaux).

Méthode de la Répétition.

C'est à cette méthode qu'on a eu recours tout d'abord. L'idée première en est due à un astronome allemand, Tobias Mayer; mais elle a été principalement développée par notre célèbre Borda, qui en a fait la base de tous les instruments goniométriques. Voici cette idée. Dans la mesure d'un angle ou d'un arc, on se contente d'un seul qu'on a aux deux bouts de cet arc, quelle qu'en soit la grandeur, en sorte que si l'on était possible de rajouter un grand nombre de fois à lui-même, la mesure de l'angle total ne serait ni plus ni moins exacte que celle de l'arc simple; on obtiendrait, par exemple, à 9" près, tout comme celui-ci. Mais comme, pour avoir l'arc simple, il faudrait diviser l'arc total par le nombre 10, 100, 1000... de Répétitions, l'erreur commise se trouverait aussi atténuée par cette division, et réduite à 0",9, à 0",09, à 0",009, etc.

Cette méthode, on le voit, atténuerait les erreurs bien plus rapidement que la répétition, c.à.d. un habile du nombre des observations, tandis qu'on restreint simplement les mesures, l'erreur décroîtrait en raison de la racine carrée de ce nombre.

Voici maintenant la combinaison instrumentale par laquelle Borda a su rendre cette méthode praticable; il est inutile de préciser que la méthode précédemment décrite suppose une semblable construction.

Pour qu'un cercle soit Répétiteur, il faut qu'on puisse amener le zéro du limbe dans une direction quelconque sans déplacer le pied de l'instrument; par conséquent, le cercle divisé doit tourner autour d'un axe propre, tout comme le cercle alidade. Ce (cercle des Verniers) auquel est fixée la lunette. Un cercle Répétiteur a donc deux axes ^{axes} cercles emboîtés l'un dans l'autre, axes qui peuvent tourner ensemble ou séparément dans une douille ou sur des coussinets convenables. De plus, le cercle divisé peut être fixé au pied de l'instrument à l'aide d'une pince munie d'une vis de rappel, et le cercle vernier qui porte la lunette peut être fixé au cercle divisé par une seconde pince également munie d'une vis de rappel. Quand ces deux pinces sont serrées, toutes les pièces de l'instrument sont fixes, et l'objet doit, avec le pied, être immobile.

Pour mesurer l'angle compris entre deux objets A, B, placés dans le plan commun des deux cercles, on fixe le cercle vernier au cercle limbe, après avoir placé le zéro du 1^{er} Vernier au zéro de la division que l'on a choisie comme origine, puis on fait tourner l'ensemble des deux cercles jusqu'à ce que la lunette

soit pointée sur l'objet A (je suppose que la Division du cercle se comptent dans le sens AB). alors, on fixe le cercle divisé au pied immobile de l'instrument, à l'objet de la pince particulière, et on lit les verniers, dont nous désignerons la moyenne par u . Cela fait, on ramène la pince du cercle vernier, de manière à rendre la lunette libre, et l'on fait tourner le cercle vernier jusqu'à ce que la lunette qu'il porte soit dirigée sur l'objet B. alors, on fixe par la pince propre le cercle vernier et la lunette au cercle divisé, qui est resté immobile avec le pied pendant ce mouvement, et l'on achève, s'il y a lieu, de perfectionner l'exactitude du pointé en se servant de la vis de rappel de la pince du vernier. Il est évident que l'arc optique a parcouru ainsi l'angle AB, en sorte que si on lisait les verniers dans la 1^{re} position, leur moyenne étant u , l'angle AOB, aurait pour mesure $u - u$.

Mais il s'agit d'ajouter plusieurs fois à lui-même cet angle AB, afin de mesurer sur le limbe un multiple de cet angle. Pour cela il suffit évidemment de recommencer la position précédente, c.à.d. la mesure de l'angle AB, en prenant cette fois pour origine d'entourer u . De l'arc parcouru précédemment sur le limbe. on laissera donc les verniers en place, sans même en faire la lecture; on détachera la pince qui fixe le cercle divisé au pied; puis on ramènera la lunette sur le premier objet A, sous que les verniers puissent changer de place sur le limbe divisé avec lequel ils font corps, grâce à leur pince particulière. Enfin, on fixera de nouveau le cercle limbe au pied de l'instrument, et l'on rectifiera, s'il y a lieu, le pointé à l'aide de la vis de rappel de la pince qu'on vient de fixer.

Tout se retrouve placé comme au début d'opération précédente, si ce n'est que les verniers marquent u_1 , et non u . on mesurera de nouveau l'angle AB en rendant libre le cercle du vernier et en amenant la lunette sur l'objet B par un mouvement de rotation qui s'effectuera autour de l'axe du cercle vernier, le cercle limbe restant fixé au pied de l'instrument. Sous cette dernière position de la lunette, les verniers marquent u_2 , l'arc partiel $u_2 - u_1 = u_1 - u$ est la mesure de l'angle AB, et l'arc total $u_2 - u$ en est le double. — De même on obtiendra l'arc triple, quadruple, etc. par une série d'opérations dans lesquelles chaque mesure commence là où la précédente a fini. après n répétitions, qu'on a soin de compter, on lira les verniers dont la moyenne sera u_n , l'arc cherché aura pour valeur

$$\frac{1}{n} (u_n - u)$$

et si e est l'erreur qui affecte l'arc multiple $u_n - u$, $\frac{e}{n}$ sera l'erreur de l'arc simple qu'on en aura conclu. (1).

Avant de discuter et de comparer cette erreur e de l'arc multiple u_n , il est nécessaire de parler ici de la Lunette de Burek, qui est fixée au dessus au pied de l'instrument, au dessus du limbe horizontal.

Dans les longues séries, relatives à la Grande Triangulation Française, on l'en a été jusqu'à répéter le même angle plusieurs centaines et même plusieurs milliers

(1). Il est facile de faire du signe pratiques pour éviter les fautes manuelles, les mouvements à contre-sens qu'on pourrait craindre de commettre dans une longue série d'opérations identiques. Supposons pour ex. que les divisions précèdent dans le sens des aiguilles d'une montre: on commencera par pointer sur l'objet de gauche, et, pour aller de celui-là à l'objet de droite, il faudra détacher le cercle vernier, tandis que pour aller de l'objet de droite à l'objet de gauche, c'est le cercle divisé qu'il faudra détacher, etc.

Il faut (1), il est indispensable de s'assurer que le pied ou le support de l'instrument ne s'est pas déplacé, ou du moins d'avoir un moyen de tenir compte de ces déplacements.

Pour cela, on dirige l'axe optique de la lunette de niveau sur un objet fixe, offrant un bon point de mire, puis, à chaque opération précédemment décrite, on consulte cette lunette. Comme elle est invariablement liée au pied de l'instrument, elle doit en suivre tous les déplacements angulaires : si donc elle s'est écartée de la mire, il faudra l'y ramener en faisant tourner l'instrument, ou du moins le cercle de niveau, et avec lui, le cercle de niveau et la lunette. Il y a pour cela une vis de rappel spéciale. Puis, comme cette petite correction aura nécessairement dérangé le point de la lunette supérieure, on la rectifiera en se servant de la vis de rappel qui avait servi à effectuer ce point.

Cette lunette de niveau joue, dans la mesure des angles horizontaux dont nous nous occupons plus spécialement ici, un rôle analogue à celui du niveau dans la mesure du angle vertical, car le niveau accuse les petits déplacements de l'axe de l'alidade dans le plan vertical où l'on observe, de même que la lunette de niveau indique les petits déplacements angulaires dans le sens horizontal. (2).

Admettons maintenant l'erreur d'une multiple n - u . Nul doute, il est évident que les erreurs de lecture et de division ne portant que sur les extrémités de cet arc, quand on le divise par n pour avoir l'arc simple, elles se trouveront aussi divisées par n . Mais là se bornera l'efficacité de la méthode de la répétition, car il s'en faut que l'erreur de point se trouve éliminée dans la même proportion. En effet, pour qu'il en fût ainsi, il faudrait que cette erreur de point ne portât que sur les extrémités de l'arc multiple n - u , tandis qu'elle se reproduit au contraire à chaque opération partielle. Le résultat sera donc ici le même que pour la méthode de réitération, c.à.d. cette erreur se trouvera singulièrement atténuée en raison de la même racine du nombre des mesures.

En désignant ces 2 erreurs par les lettres p , l , d , on aura donc pour les erreurs de lecture effectives

$$\frac{p}{\sqrt{n}} \quad , \quad \frac{l}{n} \quad , \quad \frac{d}{n} \quad \text{pour la méthode de la répétition}$$

et

$$\frac{p}{\sqrt{n}} \quad , \quad \frac{l}{\sqrt{n}} \quad , \quad \frac{d'}{\sqrt{n}} \quad \text{pour celle de la réitération} \quad (d' < d)$$

(1). Les soirées devaient plusieurs fois ; pendant la nuit, on laissait l'instrument en place, les vis serrées, afin de reprendre le lendemain matin la série de répétitions au point même où elle avait été terminée la veille. Tout au cours de ces soirées et au tel soir de la précision, il est bon d'avertir que la précision s'obtient plutôt par une étude approfondie du mode d'observation de l'instrument et de ses erreurs, que par l'accumulation exagérée de mesures. Pour que la moyenne d'un grand nombre de mesures conduise plus près de la vérité qu'une mesure unique, il faut, avant tout, que chaque opération isolée soit elle-même exempte d'erreur constante ou systématique, et se présente que des erreurs accidentelles. La connaissance des Moyennes ne porte que sur ces dernières, et non sur les erreurs qui suivent une loi. Pour celles-ci, il n'y a qu'un moyen de s'en débarrasser, c'est de découvrir leur loi ; quand cette loi est connue, on élimine l'erreur, soit par le calcul, soit par la méthode même d'observation.

(2). On pourrait même éviter toute correction manuelle en adaptant une vis micrométrique au niveau de la lunette de niveau. Si l'on se sert de cette vis on mesurerait, à chaque point de la lunette supérieure, les petits déplacements horizontaux de l'appareil, et l'on corrigerait donc par avance sur le limbe n - u de la moyenne de tous ces petits déplacements. C'est ainsi, du reste, que l'on opère avec le niveau.

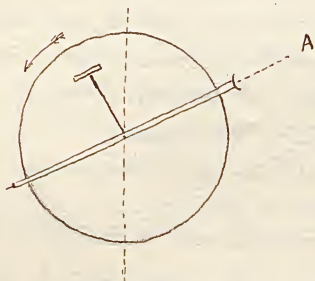
ce qui diminue l'avantage de la première, surtout quand on considère que d'ordinaire dans celle-ci les erreurs accidentelles du trait extrême, et leurs erreurs symétriques, tandis que ces dernières sont éliminées entièrement dans la seconde méthode.

Mesure du angle Vertical.

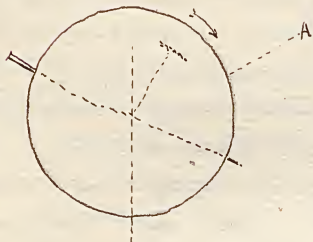
Il faut d'abord examiner le sens du Diviseur du cercle Vertical. D'ordinaire, il est direct, c.à.d. opposé à celui du aiguille d'une montre. Par conséquent, lorsque le cercle est à gauche de l'observateur (celui-ci faisant face à l'objet dont il s'agit de mesurer la distance Zenithale) les arcs croissent en allant du Zenith à l'objet. C'est dans cette position que la mesure devra être finalement exécutée.

Mais pour la commencer, il faut placer l'instrument dans la position symétrique. Il faut donc débiter par Cercle à Droite, pour finir par Cercle à Gauche. C'est l'inverse si le Diviseur était rétrograde.

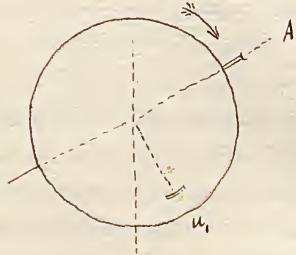
1°. Cercle à Droite.



2°. Cercle à Gauche.



3°. Cercle à Gauche.



1°. Cercle à Droite.

On amène le 1^{er} vernier sur la Division à laquelle on veut prendre pour origine; on fixe le cercle vernier, et par conséquent la lunette, au cercle extérieur divisé, et l'on dirige la lunette sur l'objet A, en faisant tourner l'ensemble des deux cercles. On fixe alors le cercle Divisé avec la pince particulière, et l'on achève le point à l'aide de la vis de rappel de cette pince. Dans cette position, on lit les verniers, dont nous désignerons par u la moyenne.

2°. Cercle à Gauche.

On fait ensuite tourner l'instrument de 180° autour de son axe vertical, de manière à amener le cercle à gauche. La lunette prend alors une position symétrique à la 1^{re}, de l'autre côté de la verticale.

3°. Cercle à Gauche.

On desserre la pince qui relie le cercle vernier de la lunette au disque divisé, et, sans toucher à la Division qui doit rester immobile, on fait tourner la lunette jusqu'à ce qu'elle soit dirigée de nouveau sur A. On lit alors les verniers dont nous désignerons la moyenne par u_1 , et la distance angulaire du point A au pôle de l'instrument est

$$Z = \frac{1}{2} (u_1 - u)$$

Le lieu du pôle de l'instrument sur le cercle divisé

et évidemment

$$\frac{1}{2}(u_1 + u)$$

c'est la distance zénithale, et $\frac{1}{2}(u_1 - u)$ est la distance zénithale de A si l'axe est vertical.

Il arrive rarement que l'axe coïncide tout-à-fait avec la verticale; il se peut même qu'il s'en écarte progressivement pendant ces manœuvres. Mais le niveau, finissant sa fonction de la lunette de l'instrument dont il a déjà été question, accusera ces déplacements, et permettra de les corriger par observations.

Soient: m la moyenne des lectures faites aux extrémités de la bulle, le cercle étant à droite, et m_1 la moyenne analogue lorsque le cercle est à gauche. L'angle Z sera alors

$$\frac{1}{2}(u_1 - u) + \frac{1}{2}(m_1 - m)$$

Cette règle si simple suppose que la graduation du niveau possède un bon niveau de celle de droite; car, si l'axe s'incline vers l'objet de manière à donner sur le limbe une distance zénithale trop petite, la correction $+\frac{1}{2}(m_1 - m)$ devra être additionnée, et, comme la bulle aura marché du côté opposé, c'est-à-dire du niveau situé de ce côté qui devra porter le signe +.

Exemple. Distance zénithale d'Antares observée à Salla, en Afrique, par M. d. Val. badie, le 5 août 1843. (1^{re} du niveau = 13", 1).

	Moyenne des lectures	Niveau
Cercle à droite:	$u \dots 145^\circ 40' 0''$	$+ 4,0 \quad - 3,0 \quad m = + 0,5'$
Cercle à gauche:	$u_1 \dots 214 \quad 17 \quad 0$	$+ 2,0 \quad - 6,0 \quad m_1 = - 2,0$
	$u_1 - u \dots 68^\circ 37' 0''$	$\frac{1}{2}(m_1 - m) = - 1,25 = - 16,4$
	$\frac{1}{2}(u_1 - u) \dots 34 \quad 18 \quad 30$	
Correction du niveau	$- 16,4$	
Z	$34^\circ 18' 13,6''$	

Méthode de la Répétition appliquée aux angles Verticaux.

on recommencera n fois la même mesure, mais en prenant chaque fois un autre point de départ, afin d'éviter de retomber sur les mêmes arcs, et par conséquent sur les mêmes erreurs. Pour cela, après la première mesure, on remettra l'instrument dans la position initiale (cercle à droite), et, au point de départ initial u , on calculera le point de départ

$u + \frac{360^\circ}{n}$
étant le nombre des lectures équidistantes. Le 3^e point de départ sera
 $u + 2 \cdot \frac{360^\circ}{n}$ etc.

Il est facile d'apprécier la Degré d'exactitude de la moyenne de ces n mesures. Nous avons vu qu'avec un théodolite médiocre, l'erreur à craindre, sur un angle $u_1 - u$, mesuré directement, était de $9''$ en moyenne. Cette erreur sera donc de $4,5''$ sur $\frac{1}{2}(u_1 - u)$ et elle se trouvera réduite à moins de



$$\frac{L''}{\sqrt{n}}$$

après n répétitions (1). - à nous assurer que les valeurs dont nous nous sommes occupés jusqu'ici, une dizaine de mesures suffisent amplement, avec le grand Cercle Divisé pour mesurer une distance horizontale à une seconde près, ou moins.

Méthode De la Répétition appliquée aux angles Verticaux.

Nous allons la décrire, quoiqu'elle doit être absolument répétée.

Après avoir mesuré comme précédemment l'angle u , $u = 22$, on répète la même observation, sans lire les verniers en u , en prenant pour point de Départ l'extrémité de cet arc, c. ad. la position actuelle du vernier et de la lunette sur le limbe divisé, afin d'ajouter à l'arc déjà parcouru sur le limbe un nouvel arc égal à 22 . Pour ce

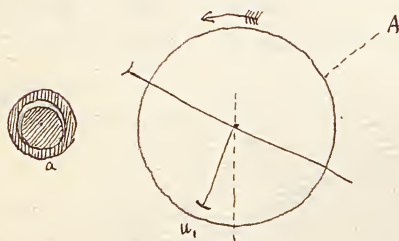
il faut une manœuvre spéciale, qui est ici figurée à (4°) à (1°). On commence par ramener le cercle vertical à droite, sans toucher aux vis de serrage des pinces. Dans cette position (4°) on desserre la pince qui retient le cercle divisé, et l'on ramène le limbe sur l'objet A (1°) en faisant tourner ensemble les deux cercles et la lunette autour de l'axe commun du cercle divisé. alors, on serre la pince de cercle, et la vis de rappel servira pour obtenir le point.

Pour cette manœuvre, l'instrument se trouve en (1°) dans une situation exactement pareille à (1°) p. 300 et peut servir pour une seconde mesure de l'arc 22 : mais le point de Départ de cette nouvelle mesure sera u , et non plus u . D'ailleurs cette manœuvre se fera comme précédemment par les manœuvres figurées en (2°) et (3°).

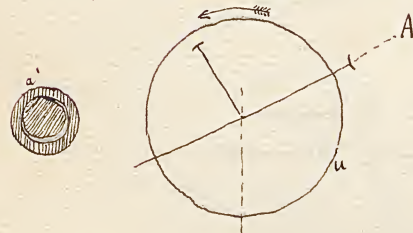
Si l'on s'arrêtait là, il faudrait lire les verniers dont la moyenne serait u_2 , et l'on aurait $u_2 - u = 2.22$. De même pour 3.22 , pour $4.22 \dots n.22$.

Dans cette méthode, on suppose que le point de Départ de chaque mesure particulière

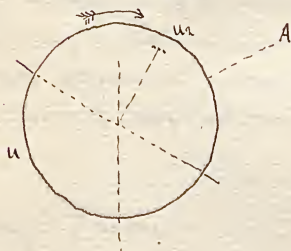
4°. Cercle à Droite.



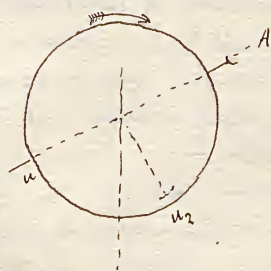
1°. Cercle à Droite.



2°. Cercle à Gauche.



3°. Cercle à Gauche.



(1) Il lui moins, pour que l'erreur moyenne de q'' , attribuée à $u - u$, comparée aux valeurs régulières de Division, se trouve éliminée par la méthode de répétition.

le cercle divisé, est précisément l'extrémité de l'axe parcourue dans la mesure précédente. C'est là la condition fondamentale du succès : et il est impossible qu'elle soit remplie quand il s'agit du angles verticaux. Elle tient à ce que la division établie entre le cercle vernier et le cercle liseur, à la fin de la 1^{re} mesure, est susceptible de varier lorsque ces deux cercles changent encore de position, par rapport à la direction de la pesanteur, dans la mesure suivante.

Pour que ces deux cercles fussent restés invariablement l'un à l'autre, il faudrait qu'ils fussent fixés en deux points distincts : or ils ne le sont qu'en un seul, par la pince du cercle vernier qui reste serrée pendant les manœuvres figurées en (6°) et en (1°). À l'avant, leurs axes, dont la coupe est reproduite sur cette dernière figure, sont enclavés dans deux planches ; mais ces axes ne consistent pas en un second point d'attache parfait, parce que l'usure de leur surface nécessiterait un certain jeu, sans lequel tout mouvement serait impossible. Ce jeu a été exagéré à dessein dans les deux coupes. Or, dans la position (6°) l'axe intérieur (celui du cercle vernier et de la lunette) se trouve en contact avec le vernier qui sert d'axe au cercle divisé en un certain point α , qui sera en général le plus bas possible, à cause du poids du cercle vernier et de la lunette. après avoir fait tourner les deux axes cercles ensemble de l'angle 22 ou de l'axe $u-u$, pour les amener dans la position (1°), il faudrait que le point α aient un α' sous lequel le contact se déplaçât.

Mais, par l'effet de la pesanteur, l'axe intérieur ne pourra rester tangent en α' ; il retournera dans la nouvelle de tout l'intervalle laissé par le jeu des axes, car la pince qui unit les deux cercles vers un point de la circonférence ne suffirait pas pour empêcher ce petit déplacement ; celui-ci s'effectuera par rotation ou roulement autour de ce point fixe comme autour d'un centre. Supposons que ce petit jeu soit seulement d'un centième de millimètre : la quantité angulaire α dont le cercle vernier se sera ainsi déplacé sera (110 y a 200 millim. de diamètre)

$$\sin \alpha = \frac{0.01}{100} \quad \text{donc} \quad \alpha = 206265'' \frac{0.01}{100} = 20'',6$$

Cet angle serait encore de $2''$ si le jeu des axes était réduit à un millième de millimètre (1).

ainsi l'instrument, dans la position (1°) n'est plus dans les conditions supposées par le principe de la répétition ; le point de départ de la 2^e opération n'est plus u , mais u_2-u et il faut qu'on y ajoute au précédent étant toujours 22, on aura pour u_2-u non pas 2.22 , mais $2.22 - \alpha$.

à chaque opération, l'erreur α se reproduira, on voit qu'au bout de n répétitions, l'axe u_2-u sera égal, non à $n.22$, mais à $n.22 - (n-1)\alpha$. L'angle 22 conclu de cet arc total sera donc

$$22 - \frac{n-1}{n} \alpha \quad \text{ou} \quad 22 - \alpha$$

à peu près, représentant ainsi presque exactement l'erreur introduite si par la manœuvre de la répétition, quel que soit le nombre de ces manœuvres (2).

Nous avons de ces erreurs auxquelles on donne le nom de Constantes, de Régulières, ou de Systématiques, parce qu'elles se reproduisent toujours les mêmes lorsque les cir-

(1) Un effet analogue se reproduirait encore si la vis de rappel dont la pince sont pourvues avaient le moindre jeu dans leurs collets.

(2) Cette erreur systématique de la répétition peut aller de $2''$ à $10''$ avec les meilleurs instruments.

combinaisons où elles ont lieu se reproduisent elles-mêmes Indistinctement

Les erreurs accidentelles, au contraire, ne dépendent ni pour le signe, ni pour la grandeur, on peut les éviter avec étonnement d'un usage au doigt.

Il est essentiel de faire remarquer ici que ce jeu ou le balancement des axes n'exerce aucune influence sur la mesure directe de l'angle 22, dans la méthode de réfraction, parce que son effet est annulé par l'emploi de verres équidistants, pourvu qu'on fasse la lecture de ces verres dans la position même où le Soleil a été observé. — on comprend d'ailleurs que le rétroviseur à 180° de l'hyndolite n'altère en rien la relation de position du deux cercles et de la lunette, pour que indirectement il repose autour de la direction même de la pesanteur.

Si l'on voulait corriger le vice de la méthode de la réfraction en tirant les verres à chaque position (1°) on retomberait sur la méthode de Bessel, sans la détermination géométrique du point de départ de chaque mesure partielle.

Il ne faut pas croire que cette erreur systématique des cercles réfractifs soit toujours la même dans le même instrument. Elle change rapidement avec la température qui fait varier le jeu des axes par la dilatation ou la contraction inégale de leurs parties, surtout quand la lunette est en laiton et placée en acier. Elle change avec l'état de flexibilité des spirales qui servent à diriger le mouvement de ces axes et qui combinent l'espace où s'appuie leur jeu. Elle change enfin avec l'usage, avec l'âge. — On a d'ailleurs placé autour de l'axe, etc. etc.

aussi les combinaisons par lesquelles on a essayé d'éliminer cette erreur sont-elles échouées, lorsque ces combinaisons reposent sur l'hypothèse que cette erreur restait toujours la même.

Cependant, dans une belle expérience géométrique conduite, il y a 20 ans, par le colonel Bressonard (maître d'un arc du Cercle moyen) on est parvenu à faire disparaître cette erreur inhérente à la réfraction, à une époque où l'on ne croyait pas pouvoir se passer de la réfraction.

On va alors indiquer le procédé d'observation suivi par le colonel Bressonard d'après l'illustre astronome Bessel, parce qu'il porte beaucoup plus loin que la destruction des erreurs d'une mauvaise méthode.

Quand on considère non seulement le jeu de l'axe du cercle des verres qui porte la lunette, mais encore, d'une manière plus générale, l'influence de la gravité sur un appareil quelconque, les flexions et les déformations plus ou moins complexes que cette action peut produire sur un instrument de mesures précises, on comprend que les erreurs qui en résultent sont liées au sens qu'affecte la gravité. Si il était possible d'intervenir, on interviendrait aussi le signe des erreurs. Soit de combiner les observations de manière à éliminer les erreurs systématiques consiste précisément à rechercher les cas de l'observation où ces erreurs sont nécessairement égales et de signe contraire; on est sûr alors que la moyenne de deux observations de cette espèce est exempte de l'erreur, quelle qu'en soit la grandeur. On ne peut changer le sens de la gravité, mais on peut remuer le ciel en quelque sorte, en observant les astres par réflexion sur un miroir de mercure.

Dans les observations directes, la action de la gravité tendant à éloigner de la gravité l'axe de la lunette, tandis que la réflexion de l'instrument, dans les observations indirectes, elle tendent à les rapprocher du zénith réfléchi, c'est-à-dire du Nadir.

Si les erreurs dues à l'action de la pesanteur produisent une erreur -2, on

1^{re} q^{ue} l'un d'eux de votre distance Zenithale & d'un autre, l'instrument nous donne
 2^e l'angle d'azimut sur l'autre méridien, ces mesures obtenues fourniront une valeur
 + 2^e sur la distance au Nadir, q^{ue} l'on portera immédiatement après par réflexion, une 3^e mesure instrumentale.

La moyenne des deux distances, $z-z$ et $z+z$ est la véritable distance de l'astre au centre, l'éloignement de toute erreur qui aurait sa source dans l'influence de la gravité. - C'est encore ainsi, par exemple, qu'on élimine les effets de la flexion dans les distances géométriques.

Il y aurait même, dans toutes les méthodes de mesure, d'autres causes ver-
sues à considérer, telles que l'action des variations de la température. Formons
nous à dire que l'observateur doit avoir soin d'éviter toute inégalité de l'appa-
reil entre la chaleur entre les diverses parties de l'instrument. Il est essen-
tiel surtout de la soustraire à l'action directe du rayons du soleil. Toute obser-
vation faite sans cette action doit être rejetée. Il faut également éviter l'obscur-
cissement l'atmosphère soit de fortes et rapides variations, parce qu'elles peu-
vent diverses parties de l'instrument ne peuvent suivre les variations avec la même
vélocité, à cause de l'inégalité de leurs masses.

Enfin l'action main de la main de l'observateur est une cause d'erreur dont on doit se préoccuper.

Quoique les mouvements de Rotation Des Diverses pièces D'un Appareil soient en Général Très-Doux et très-faciles, il faut pourtant exercer un petit effort pour les produire, et comme les actions s'exercent Tourmentiellement au cercle D'un, ou au cercle Vaincu, par l'intermédiaire Des vis De Rappel, il en résulte une petite torsion De, quelques millièmes De millimètre Dans les rayons De ces cercles. Pour en éliminer les effets, on Devra s'astreindre à faire en Double chaque manœuvre en tournant les vis De Rappel tantôt Dans un sens, tantôt Dans le sens opposé. Il est De Rig. d'ailleurs De garder le moins possible la main sur l'instrument.

Il est évident que la méthode de la Répétition ne peut faire disparaître aucune de ces causes d'erreur.

Chérolite.

Le Théodolite est destiné à mesurer les coordonnées angulaires rapportées à la Verticale, c.à.d. les Distances au Zénith et au Nadir.

Rigoureusement parlant, le Géodolite ne donne pas les azimuts absolus, mais seulement les différences d'azimuts, ou, si l'on veut, les azimuts comptés à partir d'une origine arbitraire; car l'origine des azimuts est, par convention, le Plan méridien, dont la détermination exige naturellement des observations astronomiques.

au test, il en est Deuxième De tous les instruments qui servent à mesurer des coordonnées angulaires, les uns tiennent, les autres placent: Vaxe De Lyden, l'autre

Donné, l'origine des angles plans est donnée par cela même, mais non celle des angles sphériques qui forment entre eux des plans assujettis à la seule condition de passer par l'axe. C'est ainsi que les Instruments méridiens qui servent à mesurer les coordonnées Cielles (Distances polaires et ascensions droites) n'ont rien de l'origine des Distances Polaires, mais non celle des ascensions droites. Celle-ci dépend, par convention, de la situation de l'orbite terrestre. — De même on ne peut avec un chronomètre porter sans à mesurer les Différences de Temps ou d'angles horaires, mais ne peuvent point par eux-mêmes et sans l'intervention d'instruments astronomiques, s'appliquer à l'origine qui se trouve à partir du passage du point vernal au méridien.

Puisque le Goniomètre s'adapte à la mesure du mouvement angulaire dont le Système a pour axe la verticale, il faut que cet Instrument réalise à la fois cet axe et la plans passant par cet axe. — Il doit donc satisfaire aux 3 conditions suivantes :

1°. L'axe optique de la lunette doit être un plan quand on fait tourner la lunette autour d'un axe de rotation ; par conséquent, cet axe optique doit être perpendiculaire à l'axe de rotation.

2°. Le plan doit être vertical, par conséquent l'axe de rotation de la lunette doit être horizontal ;

3°. Le plan vertical doit prendre toutes les directions possibles sous cet axe vertical ; par conséquent l'instrument doit avoir un axe vertical autour duquel puisse tourner la lunette avec son cercle vertical, et son axe horizontal de rotation.

ou tout, que l'instrument soit employé à mesurer les angles ou à déterminer les hauteurs, sa construction sera la même.

De là, trois rectifications principales, à savoir :

Rendre vertical l'axe de rotation de l'instrument ;

Rendre horizontal l'axe de rotation de la lunette ;

Rendre l'axe optique perpendiculaire à l'axe de rotation de la lunette.

ajoutons que le Niveau doit être placé avec le plus grand soin dans le plan focal ou simplement se former les images des objets vus, et que l'axe de ses fils doit être horizontal. Pour le fil vertical celui-ci à angle droit, par construction ; il est d'ailleurs facile de vérifier cette perpendicularité.

Quant aux trois rectifications principales, on ne peut espérer de les effectuer à la main avec une exactitude parfaite ; d'ailleurs, y eût-on réussi, elles ne se maintiendraient pas longtemps, et bientôt, par l'effet des changements de température, ou par l'instabilité des supports, l'instrument se déformerait. Il faut donc disposer avec un instrument incomplètement rectifié, et dont les erreurs sont variables.

Tel est le problème que se pose la pratique.

Pour le résoudre, il suffira de considérer l'instrument, dans son état actuel, comme constituant un Système de coordonnées infiniment peu différent du Système Géométrique, en sorte que pour passer de l'un à l'autre, il ne faut pas nécessairement employer des formules compliquées de transformations, mais simplement d'ajouter aux angles observés des corrections qui tiennent compte des erreurs de l'instrument comme des quantités infiniment petites, et où l'on pourra étudier à part l'influence de chacune d'elles comme si les autres n'existaient pas.

Ces formules de correction deviennent alors des fonctions très-simples des erreurs instrumentales, et la question se réduit à déterminer ces erreurs par

l'instant de l'observation. - et le procédé de la rectification en fournit le moyen. Par exemple, les deux niveaux serviront à mesurer la petite Inclinaison de chaque axe sur la verticale ou sur l'horizontale.

De même, quand il faut corriger le défaut de perpendicularité de l'axe optique sur l'axe de Rotation de la lunette, défaut qu'on nomme Erreur de Collimation, on a dû faire mouvoir le Micromètre de la lunette jusqu'à ce que l'on eût observé, sur le cercle horizontal, des lectures différant juste de 180° en passant alternativement la lunette, dans les deux positions de l'instrument (cercle à droite et cercle à gauche) sur un signal très-éloigné.

Si l'on a maintenant de mesures plusieurs l'un ou l'autre de cette opération, c.àd. l'erreur de Collimation, il suffira évidemment de prendre la moitié du nombre de lectures dont la différence des deux lectures s'élève de 180° . (1).

Sient donc I l'inclinaison de l'axe principal, i l'inclinaison de l'axe horizontal, et c l'erreur de Collimation. - Sient encore z , A , les résultats bruts de l'observation, c.àd. les coordonnées instrumentales de l'objet observé, et Z , A ses coordonnées réelles. Cherchons la correction qu'il faut ajouter à z , et A , pour avoir Z et A .

1°. Distances Zenithales. - Correction due à l'inclinaison I . -

Imaginons une sphère dont le centre soit la station, méridien de l'observateur, et dont le rayon soit assez grand pour qu'on puisse négliger la position exacte de la lunette et de son cercle: les directions de la verticale, de l'axe principal, et du rayon visuel dirigé vers l'objet seront marquées sur cette sphère par les points Z , P et O . - Projetez orthogonalement sur le plan de l'horizon ces points et les axes de cercle devenus sur cette sphère idéale.

L'instrument donne

$$PO = \frac{1}{2}(u_1 - u)$$

Le niveau donne

$$NP = \frac{1}{2}(m_1 - m) = n$$

Quant à l'axe $ZP = I$, on le trouvera aisément à l'aide du niveau en opérant dans la direction ou on atteindra son maximum. Nous avons vu que

$$Z, \text{ ou } NO = \frac{1}{2}(u_1 - u) + n$$

Quant à Z , on le déterminera par la formule de la Réduction à l'Écliptique (p. 372)

$$Z - z = \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} \phi \sin 2z$$

(1). Si le point visé est situé à une distance d qui ne soit pas très-grande, il servira nécessairement de tenir compte de l'excentricité de la lunette, c.àd. de la plus grande distance E de son axe optique à l'axe vertical de Rotation. on calculera alors l'angle $\frac{E}{d \sin i}$ sous lequel E est vu du point dont la distance est d .

Si l'on a une erreur de collimation c , on aura la Relation suivante entre les deux lectures u et u' faites quand la lunette a été successivement dirigée sur le signal, dans les deux positions de l'instrument:

$$u' - u = 180^\circ - 2 \frac{E}{d \sin i} - 2c$$

et le triangle sphérique ZON , rectangle en N , donne

$$\frac{\sin O}{\sin ZN} = \frac{1}{\sin z}$$

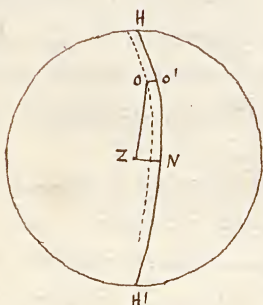
ou

$$O = \frac{n'}{\sin z}, \text{ en faisant } NZ = n' = \sqrt{1 - n^2}$$

donc enfin

$$z = z_1 + \frac{\frac{1}{2} n'^2 \sin 1''}{\operatorname{Tg} z}$$

Corrections dues à i et à c . — Nous supposons maintenant I nul, puis que nous traitons chaque erreur à part, comme si les autres n'existaient pas. Place de rotation de la lunette étant incliné de i , le plan du cercle de la lunette ne passera pas par le zénith, mais coupera la sphère étendue suivant un grand cercle dont la projection sera HNH' . De plus, comme l'axe optique de la lunette fait avec le plan de ce cercle un angle c , il décrit en tournant, un cône, qui coupe la sphère suivant un petit cercle parallèle à HNH' , et passant par les objets observés. La distance zénithale z de l'objet est ZO ; sa distance mesurée est ZO' , projection de ZO sur HNH' . or $ZN = i$, $OO' = c$. Voir



$$z - z_1 = -\frac{ic \sin 1''}{\sin z} + \frac{\frac{1}{2}(i^2 + c^2) \sin 1''}{\operatorname{Tg} z} \quad (1)$$

ainsi la correction angulaire est

$$z = z_1 + \frac{\frac{1}{2} n'^2 \sin 1''}{\operatorname{Tg} z} - \frac{ic \sin 1''}{\sin z} + \frac{\frac{1}{2}(i^2 + c^2) \sin 1''}{\operatorname{Tg} z}$$

où l'on a

$$z_1 = \frac{1}{2}(u, -u) + \frac{1}{2}(m, -m)$$

$$n = \frac{1}{2}(m, -m)$$

$$n' = \sqrt{1 - n^2}$$

(1) La formule approchée dont on vient de faire usage et comme sous le nom de Réduction d'un angle à l'horizon.

Soit l'arc $ZO = z$ projeté sur $NO' = z_1$. — Trouvons les arcs NZ , où z est l'angle dièdre A entre deux plans z , et le triangle AZO donne la relation

$$\cos z = \sin i \sin c + \cos i \cos c \cos z,$$

comme la différence $z - z_1$ est du 2^e ordre de petitesse (p. 272) il faudra tenir compte du terme de cet ordre en remplaçant $\sin i$, $\cos i$ par leurs développements en i et c .

On obtient ainsi la formule suivante, qui se trouve exacte jusqu'au terme du 3^e ordre inclusivement :

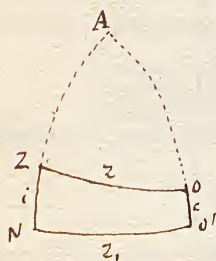
$$z - z_1 = -\frac{ic \sin 1''}{\sin z} + \frac{\frac{1}{2}(i^2 + c^2) \sin 1''}{\operatorname{Tg} z}$$

on lui donne aussi souvent une autre forme, à laquelle on arrivera en remplaçant

$$\sin z \text{ par } \frac{2 \operatorname{Tg} \frac{1}{2} z}{1 + \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} z} \quad \text{et} \quad \operatorname{Tg} z \text{ par } \frac{2 \operatorname{Tg} \frac{1}{2} z}{1 - \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} z}$$

la voici :

$$z - z_1 = \frac{\left(\frac{i-c}{2}\right)^2}{\operatorname{Tg} \frac{1}{2} z} - \frac{\left(\frac{i+c}{2}\right)^2}{\cot \frac{1}{2} z}$$



aucune de ces corrections ne change de ligne avec la position de l'instrument (ser-
-ele à droite ou à gauche). Le premier et le dernier terme correctifs sont nuls pour
des objets placés à l'horizon. - après l'appréciation l'importance de cette correction, fai-
- tous $I = i = c = 60''$ ce qui est énorme, on trouvera aisément

$$Z = z + \frac{0,035}{\text{tg } z} \mp \frac{0,017}{\sin z}$$

Pour quelle valeur sensible ($0,1$ par ex.) il faudrait que $\sin z$ ou $\text{tg } z$ fussent égaux
à $\frac{1}{10}$ environ, ou que z fût de 6° ou plus. En s'astreignant, comme on le fait,
à ne observer jamais si près du zénith avec un télescope, on pourra donc négliger
ces corrections, et sauf celle que fournit le niveau, et écrire

$$Z = z_1 = \frac{1}{2}(u_1 - u) + \frac{1}{2}(m_1 - m)$$

2°. Azimut. - Correction due à $I = PZ$.

L'origine des azimuts étant arbitraire jusqu'ici, convenons de la prendre à
partir de la direction PZ . L'azimut du point O sera
 $HZO = A$; l'azimut donné par l'instrument sera
 $HZO = A_1$. Si l'on mène en Z et en P des tangentes
aux arcs ZO et PO , ces tangentes se rencontreront
en α , et formeront un triangle très-étroit αZP qu'on
pourra considérer comme projeté en véritable grandeur
sur le plan de la figure (l'horizon). on aura donc
 $A - A_1 = \alpha$. Or, dans le triangle αZP , où $Z\alpha = \text{tg } z$,
on a l'analogie

$$\frac{\sin \alpha}{I \sin 1''} = \frac{\sin A_1}{\text{tg } z}$$

Alors

$$\sin A_1 = \frac{ZN}{ZP} = \frac{n'}{I} \quad \text{en posant } n' = \sqrt{I^2 - n^2}$$

Donc

$$A = A_1 + \frac{n'}{\text{tg } z}$$

Correction due à i .

HN étant la trace du cercle de la lunette sur la sphère céleste,
 $ZN = i$, et la direction d'azimutale de l'objet O est don-
-née en ZH par l'instrument, tandis que la vraie direction
azimutale est ZO . La différence β est le complément de
l'angle en Z du triangle rectangle OZN , lequel
donne

$$\text{tg } i = \text{tg } z \sin \beta$$

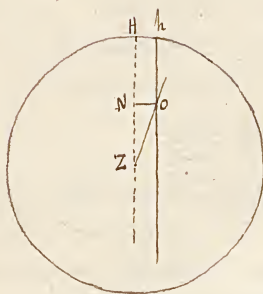
Donc

$$\beta = \frac{i}{\text{tg } z}$$

Cette correction change évidemment de signe, d'une position
de la lunette à la position symétrique.

Correction due à c .

(voir la fig. à la p. suiv.) - ZH représente le plan vertical du cercle de
la lunette, et HO le parallèle décrit par la lunette à cause de l'erreur de
collimation. $Hh = c$. - la direction azimutale d'un objet O est donc



la normale est ZO, mais la direction donnée par l'instrument est ZN; la différence β sera donnée par le triangle sphérique rectangle NOZ, où l'on a $NO = c$:

$$\frac{\sin \beta}{\sin c} = \frac{1}{\sin z}$$

Donc

$$\beta = \frac{c}{\sin z}$$

Cette correction change évidemment de signe avec la position Droite ou gauche du cercle.

En réunissant ces trois corrections, on trouve pour la direction azimutale vraie de l'objet α :

$$A = A_1 + \frac{n'}{\sin z} \pm \frac{i}{\sin z} \pm \frac{c}{\sin z}$$

Formule où le signe $+$ répond, suivant les conventions faites pour les signes de i et de c , à la position Cercle à Droite, et le signe $-$ à la position Cercle à Gauche. - Si on voit qu'en observant dans la même position de l'instrument, les deux dernières termes s'annulent, et il vient:

$$A = A_1 + \frac{n'}{\sin z}$$

ou même, si il s'agit d'objets situés à l'horizon, comme dans la plupart des opérations géodésiques, $A = A_1$ pourvu que l'instrument soit passablement rectifié.

Quand il s'agit d'astres dont la distance zénithale z peut varier notablement pendant la série des observations, on doit tenir compte de ces corrections.

Pour faire un usage tout-à-fait rationnel de l'équidistance, il faut de plus connaître et savoir mettre en usage dans le procédé d'élimination des erreurs systématiques, procédés qui se résument essentiellement dans le biseautement, l'observation par vision directe et par vision réfléchie, et le choix de points équidistants de la circonférence divisée pour origine des angles. - Si nous avons insisté sur ces méthodes, c'est qu'elles s'appliquent à tous les instruments de mesure aussi bien qu'au théodolite.

Cercle Répétiteur de Borda.

Avant l'introduction en France du théodolite, dont l'invention et l'exécution première sont dues au célèbre artiste anglais Ramsden (fin du dernier siècle), on se servait du Cercle Répétiteur de Borda, dont la construction beaucoup plus simple, surtout sous le rapport du axes, ne présentait pas autant de difficultés d'exécution aux artistes de cette époque.

Le cercle répétiteur ne mesure que des angles plans, tout comme le secteur; et ne donne point directement les azimuts ou leurs différences. Pour mesurer ces dernières coordonnées, voici comment on opérait.

à l'aide de deux mouvements de rotation successifs, on inclinait le plan du cercle de l'instrument, et on clouait dans la direction des deux objets A et B : alors on mesurait l'angle AB. Puis on ramenait le cercle dans la position verticale, et l'on mesurait la distance zénithale AZ de l'objet A et celle BZ de l'objet B : la résolution du triangle sphérique ZAB faisait connaître l'angle en Z, c. ad. la différence en minutes de A et de B.

Quand il s'agissait de longues courses, le calcul de l'angle Z était un peu simplifié : comme il diffère alors très peu de l'angle plan AB, on calculait leur différence par la formule approchée de la réduction d'un angle à l'horizon (p. 308). — Mais, pour déterminer exactement absolu d'un signal, il faut mesurer la distance angulaire à un astre quelconque, dont les coordonnées sont connues ; alors la manœuvre du cercle répétiteur devient encore plus pénible, parce que le plan des deux objets changeant sans cesse de direction par suite du mouvement de l'astre, il fallait continuellement maintenir le cercle dans ce plan : aussi deux observations étaient-ils alors nécessaires.

Disons encore que la position inclinée du cercle était une condition défavorable à l'exactitude des mesures : toutes les parties d'un instrument doivent être, autant que faire se peut, disposées symétriquement autour de la verticale.

Le Sextant.

Description du Sextant. — Son Principe. — Rectification de ses diverses parties.

On pourrait faire à cet instrument les mêmes objections qu'à un cercle répétiteur ; mais il ne faut point oublier que le sextant n'est pas destiné à mesurer les angles à une fraction de seconde près, mais à une fraction de minute près.

Le principal avantage du sextant tient d'une part à ce qu'il mesure dans les deux directions dont on veut avoir l'angle n'est pas successif, comme dans les instruments précédents, mais simultané ; et d'autre part, à ce que le rayon doublement réfléchi ne change pas de direction, quoiqu'on incline les deux miroirs autour d'une droite perp. au plan du plan du sextant, pourvu que l'angle actuel des deux miroirs ne varie pas lui-même. Il en résulte que cet instrument n'a pas besoin d'un support fixe. — aucun autre instrument ne pourrait être employé en mer.

Rectification des diverses parties du sextant :

- 1°. Rendre le grand et le petit miroirs perp. au plan du limbe ;
- 2°. Rendre l'axe optique de la lunette parallèle au plan du limbe.

La notion d'axe optique n'intervient pas, à proprement parler, dans la théorie du sextant ; il faut seulement s'astreindre à éviter la coïncidence des images vers le milieu du champ.

La rectification favorable s'y trouve indiquée par deux fils parallèles au plan du limbe, et dont le plan passant par le centre optique de l'objectif et au milieu de l'intervalle du deux fils qu'il faut rendre parallèles au plan du limbe. Il y a des vis de rappel pour toutes ces rectifications, qui doivent être effectuées quelques

minutes près (1).

avec le sextant, comme avec le cercle Répétiteur, on ne mesure point un système complet de coordonnées sphériques, mais seulement la distance hémisphérique d'un objet ou sa distance angulaire à un autre point. - Cependant, comme un point de la sphère se trouve déterminé par sa distance angulaire à deux autres points connus, tout aussi bien que par sa coordonnées polaires, on peut considérer les distances que l'on mesure au sextant comme de véritables coordonnées angulaires on appliquera des formules de transformation spéciales.

Supposons par exemple qu'on ait mesuré au sextant les distances AS, AS' ou d et d', d'un même point A au Soleil, à deux heures t et t': il sera facile d'en déduire les coordonnées du point A, c'est la distance hémisphérique Z et son azimut AZM = X. En effet, on déduira des éphémérides les coordonnées polaires du Soleil pour les heures t et t'; puis, à l'aide de la déclinaison du lieu, et des formules de transformation des coordonnées, on calculera les distances Z et Z' et les azimuts S, S' du Soleil pour les mêmes instants. D'après les deux triangles AZS et AZS' donneront les deux équations suivantes

$$\cos d = \cos z \cos Z + \sin z \sin Z \cos (X - S)$$

$$\cos d' = \cos z' \cos Z + \sin z' \sin Z \cos (X - S')$$

on voit par là qu'on sextant suffit parfaitement pour résoudre toutes les questions qui se rattachent à des mesures de coordonnées sphériques; il suffit au marin, au géographe, au voyageur qui veut relever les points remarquables sur l'horizon, ou à l'ingénieur chargé de préparer le canevas d'une opération géodésique.

La précision qu'on obtient avec le sextant bien rectifié dépend surtout de l'exactitude avec laquelle on a déterminé son erreur d'exactitude, dont il faut nécessairement tenir compte dans toutes les mesures. admettons que cette erreur soit bien connue, et qu'on en ait purgé les observations: il restera les erreurs de division, celles de lecture et celles du pointé, auxquelles il faut ajouter l'erreur du zéro ou plutôt de l'origine à partir de laquelle on compte les angles. Quand il s'agit d'observations astronomiques, on détermine cette origine, qui correspond au parallélisme des deux miroirs, en amenant successivement au contact les bords opposés des deux miroirs du Soleil, et en prenant la moyenne des lectures du vernier.

Supposons par exemple qu'on ait trouvé ainsi

1 ^{er} contact	2' 30"
2 ^e "	1° 6' 10"

moyenne 34' 35"

La demi-somme 34' 35" indique que les angles mesurés au sextant ont ce

(1) Il faut aussi examiner si les faces du grand miroir sont bien parallèles. on s'en assure en regardant le Soleil par réflexion à l'aide d'une lunette plus forte que celle du sextant. Si la face non étamée donne une image distincte de la face étamée, le miroir est prismatique et doit être rejété.

point pour origine (1), et il faudra retrancher en $34' 35''$ de toutes les lectures faites sur l'échelle de l'Instrument.

Et, quoiqu'on puisse répéter cette détermination un grand nombre de fois, de manière à atténuer l'erreur qu'elle comporte, il faut cependant estimer cette erreur à $10''$; celle de la lecture du vernier à $10''$, à $15''$ l'erreur de division, et à $5''$ celle du point avec une faible lunette qui ne grossit guères que 6 à 8 fois. — Quant aux erreurs dues à une rectification imparfaite, elles montent à peine à quelques secondes, si l'on a pris les soins convenables : — on peut en tenir compte par le calcul.

Pour toutes les erreurs possibles énoncées de même sens, on voit que l'erreur d'un angle mesuré au caducée était à

$$10'' + 10'' + 15'' + 5'' = 40''$$

En moyenne, on peut la porter à $22''$, et si l'on s'agit de hauteurs mesurées par réflexion sur un horizon artificiel, l'erreur se trouvera réduite à moitié par la division par 2, parce que l'Instrument donne alors le double de la hauteur de l'astre.

Les observations faites en mer sont généralement moins précises, à cause de l'incertitude qui règne souvent sur les valeurs angulaires de la dépression de l'horizon sensible, auquel on rapporte les observations de hauteur. La dépression vraie, celle qui aurait lieu si l'atmosphère n'existait pas, a pour formule

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2h}{R}}$$

h étant la hauteur de l'œil au dessus du niveau de la mer, et R le rayon terrestre, tandis que la dépression apparente et moindre, à cause de la réfraction atmosphérique qui élève un peu l'horizon visible.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que l'observateur avait tenu compte de l'erreur d'excentricité. Nous avons encore dit succinctement que cette erreur reste constante et que l'Instrument conserve la forme circulaire malgré les dilatations et les changements de température. Toutes ces hypothèses gratuites sont fausses; il vaut mieux employer, comme le proposait Collet D'Angers, un cercle entier au lieu d'une portion de cercle.

Le Cercle de réflexion est donc bien préférable au caducée. Borda l'a même disposé de manière qu'on y puisse appliquer la méthode de la répétition. — Son avantage devient encore plus sensible quand on y substitue, comme la propose le chevalier améri, des prismes de verre aux miroirs étamés (2), et quand on renforce la puissance optique de la lunette par un objectif à 2 lentilles.

Il est bien établi qu'avec un tel cercle, de 6 à 8 pouces de diamètre, on atteindrait une précision de $3''$ ce qui suffit à toutes les exigences de la Géographie, et même à beaucoup d'opérations de la Géométrie de grand ordre.

Ajouter qu'avec les cercles entiers à réflexion, on parvient à éliminer entièrement presque toutes les erreurs instrumentales, par certaines combinaisons.

(1) La demi-différence donne le diamètre angulaire du soleil, qui est ici de $32' 50''$. En comparant ce diamètre observé avec celui que les éphémérides astronomiques indiquent pour le même jour, on peut se faire une idée de l'exactitude de l'observation.

(2) La réflexion par les prismes est totale, et les images sont bien plus vives qu'avec les miroirs étamés.

- sous l'observation, et qui en mesure tous les angles possibles, de 0° à 180° ,
 tandis qu'avec la sextant, on ne dépose guère, à cause de la construction même,
 de l'angle de 130° ou de 140° .

Réfraction.

on a trouvé (p. 247) la formel.

$$d\rho = - \frac{\frac{r_1 l_1}{r l} \sin z_1 \frac{dl}{l}}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_1 l_1}{r l} \sin z_1\right)^2}}$$

Il faut trouver une relation entre r et l .

Essayons la relation

$$\frac{r_1}{r} = \left(\frac{l}{l_1}\right)^m$$

qui paraît s'adapter parfaitement au décroissement réel du Densité (1) - d'ailleurs la relation de r se fait facilement. Car d'ell'q.

$$r l \sin I = r_1 l_1 \sin I_1 = \text{const.} \quad (\text{p. 247})$$

on voit -

$$\frac{r_1 l_1}{r l} \sin z_1 = \left(\frac{l}{l_1}\right)^{m-1} \sin z_1 = y \quad (\text{pour abréger})$$

d'où

$$(m-1) d\rho = - \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

et en passant l'intégrale entre les limites $y = \sin z_1$ relatif au Sol, et $y = \frac{1}{l^{m-1}} \sin z_1$ relatif à la couche où $l = s$, c.à.d. à la limite extrême de l'atmosphère, l'on aura

$$(m-1) \rho = z_1 - \arccos \left(\sin = \frac{1}{l^{m-1}} \sin z_1 \right)$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sin z_1 = l_1^{m-1} \sin \left\{ z_1 - (m-1) \rho \right\}$$

Après avoir à désigner ρ . on a

$$\sin \left\{ z_1 - (m-1) \rho \right\} = \frac{1}{l_1^{m-1}} \sin z_1$$

on peut écrire

$$\sin z_1 - \sin \left\{ z_1 - (m-1) \rho \right\} = \left(1 - \frac{1}{l_1^{m-1}}\right) \sin \left\{ z_1 - \frac{m-1}{2} \rho + \frac{m-1}{2} \rho \right\}$$

ou

$$2 \sin \frac{m-1}{2} \rho \cos \left\{ z_1 - \frac{m-1}{2} \rho \right\} = \left(1 - \frac{1}{l_1^{m-1}}\right) \left\{ \sin \left\{ z_1 - \frac{m-1}{2} \rho \right\} \cos \frac{m-1}{2} \rho + \sin \frac{m-1}{2} \rho \cos \left\{ z_1 - \frac{m-1}{2} \rho \right\} \right\}$$

ou encore

(1). on peut démontrer que cette expression est insuffisante pour représenter complètement le décroissement du Densité dont la loi paraît fort complexe : mais elle a l'avantage de se prêter à une interprétation facile de $d\rho$. Alors nous, nous la prenons comme une 2^e approximation de cette théorie, et nous la retrouverons encore dans la théorie du Réfraction Géométrique.

$$\left(1 + \frac{1}{f^{m-1}}\right) \sin \frac{m-1}{2} f \cos \left(z_1 - \frac{m-1}{2} f\right) = \left(1 - \frac{1}{f^{m-1}}\right) \sin \left(z_1 - \frac{m-1}{2} f\right) \cos \frac{m-1}{2} f$$

Donc enfin

$$\operatorname{Tg} \frac{m-1}{2} f = \frac{f^{m-1} - 1}{f^{m-1} + 1} \operatorname{Tg} \left(z_1 - \frac{m-1}{2} f\right) \quad (1)$$

formule où f n'est pas encore déterminé, mais qui se prête à un calcul d'approximation successive.

on pourra déterminer l'exposant m d'après le déterminement de densité qui s'obtient dans l'atmosphère à mesure qu'on s'y élève : mais il vaudrait mieux le déterminer par une observation directe sur les réfraction astronomiques que cette formule lui représente. - on a trouvé ainsi $m = 7,5$. - f est connu. Par suite, la réfraction f qui répond à la distance horizontale apparente z_1 , et à la densité de la couche inférieure marquée par $b = 0^m,760$ et $t = 0$ aura pour expression

$$f = 60'',666 \operatorname{Tg} (z_1 - 3,25 f)$$

au lieu d'opérer sur l'expression complète de la réfraction, il est plus simple de développer en série la formule (1) et de considérer ensuite les coefficients de cette série comme des indéterminées dont la valeur sera fixée par l'observation. - Pour abréger, écrivons ainsi l'éq. (1)

$$\operatorname{Tg} n f = p \operatorname{Tg} (z_1 - n f)$$

En développant :

$$\operatorname{Tg} n f = p \cdot \frac{\operatorname{Tg} z_1 - \operatorname{Tg} n f}{1 + \operatorname{Tg} z_1 \operatorname{Tg} n f}$$

Donc

$$\operatorname{Tg} z_1 \operatorname{Tg}^2 n f + (p+1) \operatorname{Tg} n f - p \operatorname{Tg} z_1 = 0$$

$$\operatorname{Tg} n f = \frac{p+1}{2 \operatorname{Tg} z_1} \left\{ -1 + \left(1 + \frac{4 p^2 \operatorname{Tg}^2 z_1}{(p+1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

Développant en série, on aura

$$\operatorname{Tg} n f = \frac{p}{p+1} \operatorname{Tg} z_1 - \frac{2 p^2}{(p+1)^3} \operatorname{Tg}^3 z_1 + \dots$$

on pourra donc poser

$$f = A \operatorname{Tg} z_1 + B \operatorname{Tg}^3 z_1 + C \operatorname{Tg}^5 z_1 + \dots$$

on a trouvé

$$f = 60'',567 \operatorname{Tg} z_1 - 0'',067 \operatorname{Tg}^3 z_1$$

Cette formule est plus exacte que celle où il n'entre que la 1^{re} puissance de $\operatorname{Tg} z_1$, mais elle ne s'applique pas à l'observation.

Réfraction Géodésique ou Céleste.

Le problème consiste à déterminer la somme des angles de contingence de la trajectoire lumineuse entre deux points voisins.

Des Relations (p. 247)

$$r \frac{dr}{dl} = r_g I$$

$$df = - \frac{dl}{l} r_g I$$

ou bien, en éliminant I ,

$$df = - \frac{r}{l} \frac{dl}{dr} dr$$

qui est l'éq. différentielle de la Réfraction Géodésique. Mais il faut encore y introduire une relation entre les variables l et r .

Reprenons donc l'hypothèse (p. 315)

$$\frac{r}{l} = \left(\frac{l}{l_0} \right)^m$$

ou

$$r l^m = r_0 l_0^m = \text{const.}$$

ou en d'autres

$$l^m dr + m r l^{m-1} dl = 0$$

$$\frac{r}{l} \frac{dl}{dr} = - \frac{1}{m}$$

L'éq. différentielle de la Réfraction se réduit alors à

$$df = + \frac{1}{m} dr$$

D'où

$$f = \frac{1}{m} r$$

Cet angle au centre N auquel la Réfraction est proportionnelle (dans l'hypothèse admise ici d'après pour la loi d'accroissement de la densité) se déduit aisément du calcul des triangles géodésiques qui relient les diverses stations. Ce calcul donne, en effet, en mètres, la longueur c de l'arc de grand cercle compris entre les verticales des deux stations : cet arc c se trouve d'ailleurs compté sur la surface de niveau de la mer. Or, des éléments de l'ellipsoïde terrestre, et de l'azimut relatif des deux stations, on déduit aisément, en mètres, le rayon de courbure R de cet arc : on aura donc $Rc = c$, le rapport N exprimé en parties du rayon, ou

$$N = 206265'' \frac{c}{R}$$

si l'on veut avoir N en secondes. — on tient de calculer le rayon de courbure R , on peut se contenter souvent du $\frac{1}{2}$ grand axe

$$a = 6377399^m \quad (\text{son log. est } 6,8046435)$$

Dont les rayons de courbure ne diffèrent jamais beaucoup.

Si, au lieu de la relation hypothétique que nous venons d'admettre, on introduisait dans cette analyse une autre relation, celle par exemple à laquelle Laplace s'est arrêté dans sa théorie de la réfraction astronomique, la

Réfraction ne serait plus rigoureusement proportionnelle à l'angle au centre. Mais, comme il s'agit toujours en Géodésie d'une faible différence de niveau, on peut aussi représenter une approximation suffisante le décroissement du densité ρ en des indices l qui a lieu dans une couche peu épaisse par la formule adoptée

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \left(\frac{l}{l_1}\right)^m \quad (1)$$

La réfraction $f = \frac{1}{m} \nu$ est l'angle du tangente extrêmes de la trajectoire lumineuse comprise entre les deux stations; elle est donc la somme des angles qui se trouvent entre la tangente faite avec la courbe, angles qui peuvent, en Géodésie, le nom de Réfraction. Nous en avons la somme $\frac{1}{m} \nu$, m étant supposé connu, mais cette relation ne suffit pas pour la déterminer individuellement; il faudrait encore connaître leur différence par exemple.

Or, on suppose aisément que cette différence est vraiment faible dans presque tous les cas qui se présentent en Géodésie; on admet donc qu'elle est négligeable, ou plutôt nulle, ce qui revient à supposer la portion considérée de la trajectoire lumineuse une ligne osculatrice au milieu de et avec.

Ainsi, en désignant par f la réfraction géodésique, et non plus la réfraction astronomique, on a

$$f = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m} \nu = \gamma \nu.$$

γ étant le coefficient de la réfraction géodésique.

Détermination du coefficient γ . — D'après cette théorie, γ est l'inverse de $\frac{1}{m}$; or la constante m a pour valeur 7,1 d'après la théorie précédente des réfractions astronomiques. Donc

$$\gamma = \frac{1}{7,1} = 0,0667$$

Celle est aussi la valeur (2) que lui assignent les beaux nivellements géodésiques de M. M. Struve, Gauss, Col. Larabaut, G. M. Baeyer.

Cependant, cette valeur de γ ne doit être considérée que comme une valeur moyenne; elle varie avec les heures de la journée, parce que la distribution verticale du densité dans les couches basses varie d'une manière sensible sous l'influence de la chaleur solaire et du rayonnement nocturne. C'est surtout dans la partie moyenne de la journée que le coefficient acquiert sa valeur normale 0,0667. Nous lui faisons le plus favorable pour les opérations de nivellement géodésique se trouvant entre 1 et 2 heures après le lever du soleil ou avant son coucher, précisément à l'époque

(1). La relation entre l'indice l et la densité ρ dans une couche d'air étant, d'après les physiciens,

$$l^2 - 1 = 0,000588 \rho$$

cette loi prend la forme

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \left(\frac{1 + 0,000588 \rho}{1 + 0,000588 \rho_1} \right)^{\frac{m}{2}}$$

(2) Nous avons adopté

$$\gamma = 0,077$$

valeurs plus rapprochées de celles qui ont été admises par Delambre et pour les marais. Il paraît que la réfraction géodésique est plus forte en mer qu'à terre. Les indices disparaissent généralement dans les nivellements à trois-pieds portés, ou par la méthode du distance zénithale rapprochées et simultanées.

De la fourmée si les Images des objets loignés sont les plus ondulées. — au Delà De ces limites, les Réfractions géométriques augmentent sensiblement, et peuvent varier dans des limites assez étendues, à mesure que le calme des Images se rétablit. (1).

Si l'on pouvait mesurer la Densité De l'air à ~~deux~~ hauteurs différentes (à l'aide Du Thermomètre et Du Baromètre) la formule (p. 318, note.)

$$\frac{r_1}{r} = \left(\frac{1 + 0,000589 \delta}{1 + 0,000589 \delta_1} \right)^{\frac{m}{2}}$$

permettrait De Déterminer la valeur actuelle De m , et par suite celle De r .

Mais l'arrivé rarement qu'on puisse Déterminer ainsi la Densité De l'air en deux points suffisamment éloignés, dans le sens vertical. D'ordinaire, on ne possède que les indications météorologiques propres à la Station où l'on observe, et l'on ne peut en Déduire la valeur actuelle Du coefficient r que par la voie empirique. — voici la meilleure formule De ce genre que je connais (M. Gaye):

$$r = \left(0,0757 + \frac{0,1357}{A} \right) \frac{b}{0,1760} \cdot 1,0118^{20-t}$$

Dans laquelle t et b sont la température Du Thermomètre Centigrade et Du Baromètre mètre, réduits à 0° , et A l'élévation moyenne De la trajectoire lumineuse au-dessus Du sol (2).

(1). Dans la même De la base D'Ensisheim, en Alsace, énorme base De 20000 mètres De longueur, où le terrain, D'ailleurs favorable, présentait encore. D'aut sur le milieu une éminence qui marquait à un bout le signal D'Aloutre extrême, le Colonel Henry et le commandant Delcroz profitaient favorablement De l'accroissement De Réfraction qui se manifeste De trois heures De l'après-midi, pour faire les observations angulaires. avant cette heure, le signal se trouvait masqué par le terrain; après cette heure, la Réfraction, alors croissante, se surlevait peu-à-peu, pour ainsi dire, et se faisait apparemment au-dessus Du sol. — Le général Baeyer a D'ailleurs Utilisé la Réfraction extraordinaire qui rendent, à certaines époques De l'année, la côte basse Du Bas Danube visible Du continent, pour les rattacher à sa belle triangulation Du Littoral Russe.

(2). Cette formule a été Donnée récemment par un célèbre astronome, M. De Struve, dans son ouvrage sur la Différence De niveau entre la mer Noire et la mer Caspienne. — Grand A est très-petit, la trajectoire n'est le sol, et les hauteurs Devient insignifiantes. on doit éviter De tels cas dans la pratique, car c'est aussi près Du sol que se produisent les plus grandes anomalies dans la Réfraction (il suffit Du nivellement à grande portée).

Nivellement Géodésique.

Est toujours accompagnée d'une triangulation qui donne, en même temps, les distances de stations projetées sur la surface. Théorie de l'ellipsoïde terrestre, c.à.d. sur la surface géométrique du niveau de la mer, totalement prolongée au-dessus du continent.

Il y a là deux opérations distinctes.

1. La mesure des différences de niveau de deux stations consécutives soit par des observations de distances limitées réciproques, mesurées simultanément aux deux stations, par deux observations, soit par une seule observation de distance limitée. Le calcul de ces mesures donne la hauteur de chaque station au-dessus du niveau de la station précédente.

2. La mesure de la hauteur absolue de la dernière station au-dessus du Niveau-moyen de la mer; elle s'obtient, soit par la mesure de la dépression de l'horizon de la mer, soit par un nivellement ordinaire qu'on conduit de cette station jusqu'à un piquet planté sur le rivage, vers la laisse de basse mer.

On mesure le Niveau moyen de la mer par la moyenne entre une grande et une petite mer consécutives. Comme les hauteurs du mers varient avec le temps, on élimine la partie de cette variation qui est proportionnelle au temps en prenant la moyenne entre deux hauteurs mers consécutives, puis la demi-somme de cette hauteur moyenne et de la borne mer intermédiaire. - Il faut tenir compte du vent et de l'état du baromètre.

La formule de la différence de niveau entre r et r' entre deux stations l'une au-dessus de distances limitées réciproques et simultanées, est

$$\frac{r' - r}{r' + r} = \text{Tg } \frac{1}{2} v \text{ Tg } \frac{1}{2} (z' - z)$$

où r et r' représentent les distances de deux stations au centre de la sphère osculatrice le long du cercle C qui joint les deux stations projetées sur le sphéroïde, v l'angle de ces rayons qu'on peut confondre avec les verticales locales, z' et z , les distances limitées observées et affectées de la réfraction (apparente).

Sont h et h' les altitudes de deux stations, c.à.d. leurs hauteurs absolues au-dessus de la surface du sphéroïde (au-dessus du Niveau-moyen de la mer) ou au-dessus de la sphère osculatrice qui remplace localement cette surface, nous aurons

$$r' - r = h' - h$$

$$\text{et} \quad r' + r = 2R + h' + h$$

où désignent par R le rayon de la sphère osculatrice au milieu de l'arc C .

La formule précédente devient alors

$$h' - h = (2R + h' + h) \text{Tg } \frac{1}{2} v \text{ Tg } \frac{1}{2} (z' - z) \quad (1)$$

On néglige ordinairement le terme $h' + h$ dans le second membre, mais il est facile de tenir compte, car le nivellement précédent a fait connaître h , et une valeur approchée de $h' - h$ qu'on tirera de (1) en y négligeant une première fois $h' + h$ - aura toujours une exactitude bien suffisante pour le calcul définitif de la formule.

Quant aux réfractions, elles se trouvent entièrement éliminées, du moins dans l'hypothèse, admise ici, de leur égalité.

Quant à l'angle au centre v , exprimé en parties du rayon, il se déduit de son Géodésique C par la formule $Rv = C$.

Si, dans la formule approchée

$$h' - h = 2R \text{Tg } \frac{1}{2} v \text{ Tg } \frac{1}{2} (z' - z)$$

on remplace $Tg \frac{1}{2} N$ par $\frac{1}{2} N = \frac{1}{2} \frac{c}{R}$, R disparaît, et l'on aura la formule traditionnelle.

$$h' - h = c Tg \frac{1}{2} (z' - z_1)$$

qui dispense de calculer R et N .

Si l'on n'a mesuré qu'une seule Distance Zenithale z_1 , on remplace dans l'équation précédente, z' , par la valeur déduite de la relation fondamentale:

$$180^\circ + N = z_1 + z' + 2\gamma N \quad (\text{voir la Réf. Géodésique}).$$

et l'on aura l'équation rigoureuse:

$$h' - h = (2R + h + h') Tg \frac{1}{2} N \cot \left\{ z_1 - \frac{1}{2} N (1 - 2\gamma) \right\} \quad (2)$$

qui peut être, pour approximation, sous la forme plus simple

$$h' - h = c \cot \left\{ z_1 - \frac{1}{2} N (1 - 2\gamma) \right\}$$

De même on aura $h' - h = -c \cot \left\{ z'_1 - \frac{1}{2} N (1 - 2\gamma) \right\}$ si z'_1 n'est seul mesuré.

Le cas (p. 320) où il s'agit de la hauteur absolue de la dernière station au-dessus du niveau de la mer, mérite une discussion spéciale. Il est évident qu'à l'endroit dans le cas de Distances Zenithales Reciproques Simultanees, les observations prises à l'horizon visible d'une station quelconque versait cette station par 90° de Distance Zenithale apparente. Seulement, dans ce cas, on ignore la longueur en mètres de l'arc C ; et par conséquent on ne peut en déduire l'angle N . C'est par là que la Réfraction survient dans le problème.

Soit donc $z'_1 = 90^\circ$, on aura N par la relation fondamentale

$$180^\circ + N = z_1 + z'_1 + 2\gamma N = z_1 + 90^\circ + 2\gamma N$$

d'où

$$N = \frac{z_1 - 90^\circ}{1 - 2\gamma}$$

qui, substitué dans (2), donne l'équation rigoureuse

$$h = (2R + h) Tg \frac{1}{2} \left(\frac{z_1 - 90^\circ}{1 - 2\gamma} \right) Tg \frac{1}{2} (z_1 - 90^\circ) \quad (3)$$

qui peut servir d'indication comme il suit (en faisant $z_1 - 90^\circ = d$ (voir (1)) et remplaçant les tangentes par les arcs

$$h = \frac{1}{2} R \frac{d^2 \sin'' 1''}{1 - 2\gamma} \quad \text{ou} \quad h = \frac{1}{2} R \frac{Tg^2 d}{1 - 2\gamma}$$

Pour donner une idée de ces calculs, appliquons la dernière formule à un exemple tiré du Bureau Géodésique que le commandant Belcor a exécuté en France.

Le 24 Novembre 1914, à 3^h 58^m temps moyen, la Distance Zenithale de l'horizon de la mer, au point de la tour de la latitude de Bayeux, était

$$z_1 = 90^\circ 17' 24'', 3$$

et au même instant, les instruments météorologiques de cette station donnaient

$$b = 0^m, 75655 \text{ à } z_1 \text{ et } t = + 5^\circ, 0$$

(1) Le marais surmonte et angle d la dépression apparente de l'horizon. Pour eux, h est connu. Il faut donc résoudre la formule pour rapport à d , en écrivant:

$$d = \frac{\sqrt{1 - 2\gamma}}{\sin'' 1''} \sqrt{\frac{2h}{R}} \quad \text{ou} \quad d = \frac{0,916}{\sin'' 1''} \sqrt{\frac{2h}{R}}$$

en donnant à γ une valeur moyenne de 0,08.

Il serait plus exact de tenir compte de la variation de γ , auquel les marais obéissent avec raison une valeur non peu plus forte qu'à terre.

La formule dont ils suivent habituellement

$$d = \frac{1 - \gamma}{\sin'' 1''} \sqrt{\frac{2h}{R}}$$

n'est exacte qu'en termes près du 2^e ordre en γ .

Quant à R, nous admettons que l'observation a été faite dans tel ou tel méridien, et que pour simplifier, R est le rayon de la sphère osculatrice dans tel ou tel méridien, au point dont la latitude est $40^{\circ} 44'$ (celle de Bayona). on trouve

$$\log \frac{1}{2} R = 6,50321,$$

par le calcul de la formule connue

$$R = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \cos^2 \lambda)^{3/2}} \quad \text{où } a = 6377398^m, \quad e^2 = 0,0066744 \quad \text{et } \lambda = 40^{\circ} 44'$$

Le calcul conduit à

$$\log \frac{1}{2} R = 6,50321$$

$$2 \log 9y d = 5,42532$$

$$\text{ct. log}(1-2\gamma) = 0,09045$$

$$\log h = 2,01898$$

ainsi la hauteur absolue de la station au-dessus du niveau de la mer, à l'instant de l'observation, était de $104^m,47$. Il faudrait encore déduire de ce résultat la hauteur de la mer elle-même au-dessus du niveau moyen de l'Océan; c'est un calcul qu'on pourrait faire, puis quel qu'ait été l'observateur a donné l'genre exact de la mesure (1).

La partie faible du Nivellement Géodésique, quand les opérations n'ont pas été conduites de manière à éliminer la réfraction, dépend surtout de l'incertitude de la valeur de γ . En supposant par exemple dans les autres parties de l'observation, l'erreur exagérée sur une différence de niveau, à cause de l'incertitude de γ , vient rapidement avec la distance, comme on en pourra juger par le tableau suivant :

angle au centre δ	Distance des Stations	Incertitude sur $h' - h$
$0^{\circ} 10'$	18519^m	$\pm 0^m,06$
$0^{\circ} 30'$	55556	$0,90$
$1^{\circ} 0'$	111111	$1,98$
$1^{\circ} 30'$	166667	$4,45$
$2^{\circ} 0'$	222222	$7,90$

De la même on déduirait un avantage marqué pour les nivellements à grande portée : car si on détermine d'un seul coup la différence de niveau entre deux stations dont l'un est au centre et l'autre à 2° , l'incertitude sur le résultat sera de $\pm 7^m,90$, tandis que si l'on procède par stations intermédiaires de $10'$ en $10'$, l'incertitude sera seulement $0^m,06 \times \sqrt{12}$, 12 étant le nombre des mesures partielles. Cela fait $0^m,20$.

on voit aussi combien il importe d'opérer par distances géométriques rapprochées et bien choisies, surtout quand les stations sont très distantes. Dans le nivellement ordinaire, on élimine la réfraction en plaçant l'instrument à mi-chemin entre les stations. Cette méthode, qui s'est usée avec succès dans quelques opérations géodésiques, a, dans la pratique, l'avantage considérable de pouvoir être effectuée par un seul

(1) La formule rigoureuse (2) aurait donné $104^m,46$ - on trouve dans plusieurs ouvrages de Géodésie justement estimés d'autres formules approximatives, telles que

$$h = \frac{1}{2} R \operatorname{Tg}^2 \left(\frac{d}{1-\gamma} \right) \quad h = 2R(1-\gamma)^2 \operatorname{Tg}^2 d$$

laquelle on ne pourrait ramener la formule rigoureuse qu'en négligeant les termes du carré, etc. de γ . Elle donnent les 1^m ou 2^m d'erreur.

En l'absence générale, avant d'employer des formules approximatives, il est prudent de les comparer aux formules rigoureuses, pour savoir si elles offrent le degré d'approximation dont on a besoin dans un cas donné.

Observateur (1), mais elle peut offrir, dans certains cas, bien des difficultés pour le choix des Stations.

Détermination expérimentale du Coefficient γ . — La relation fondamentale

$$180^\circ + N = Z + Z' + 2\gamma N$$

donne γ lorsque les deux Distances Zénithales rapprochées Z et Z' ont été mesurées simultanément, N étant d'ailleurs connu par les opérations Géodésiques.

voici les Résultats les plus récents et les plus sûrs.

Triangulation de France	Colonel Corabœuf	$\gamma = 0,0643$
de Russie	M ^r . de Struve	$\gamma = 0,0618$
de Hanovre	M ^r . Gauss	$\gamma = 0,0653$
de Prusse	Général Baeyer	$\gamma = 0,0620$

Ces valeurs sont relatives à la partie favorable de la Journée. Si d'autres heures, surtout au coucher du Soleil, la Réfraction croît, et son coefficient peut atteindre le double de cette valeur.

Malheureusement, ces heures ne sont pas favorables à l'exactitude des points, à cause du Tremblement perpendiculaire du Image. on ne peut-on guère répondre de 3" sur une Distance Zénithale d'un objet terrestre (2). — Malgré cela, quelques nivellements Géodésiques ont admirablement réussi : tels entre autres les beaux opérations Géodésiques du Colonel Corabœuf entre l'Océan et la Méditerranée.

Et même les Observateurs ont eu soin de choisir les Stations les plus élevées et les moins éloignées l'une de l'autre, après de soigneuses les Trajectoires lumineuses aux Réfracteurs Tricouverts des couchers les plus basses.

On trouve d'ailleurs fréquemment dans les nivellements à petite portée.

ajoutons que l'Héliotrope de Gauss est d'un très-grand secours dans ce genre de l'opération : c'est un miroir mobile (Héliostat) qui forme signal pour un observateur éloigné.

(1). Dans la pratique, on ne s'estreint pas toujours malheureusement à la simultanéité des observations : on se borne souvent à mesurer successivement les Distances Zénithales, dans des circonstances aussi semblables que possible, par exemple aux mêmes heures de la Journée.

à l'avance, les Réfractions ne sont pas ainsi absolument éliminées ; mais elles n'interviennent plus que par leurs différences, toujours très-petites, si l'Observateur a eu soin d'observer dans la partie de la Journée où le Coefficient γ présente des valeurs à peu près constantes.

(2). Par une seule mesure, naturellement, on a une précision plus grande en s'élevant.

astronomie .

Épîtres Diverses .

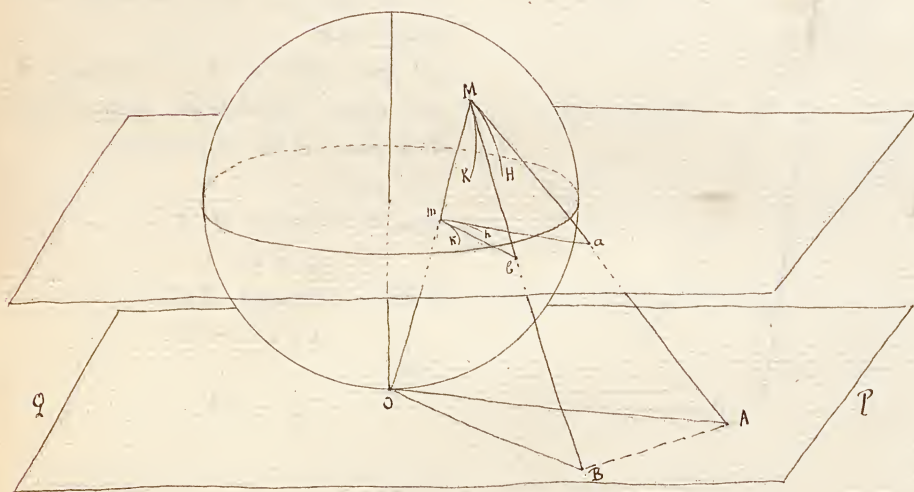
M. de la Harpe.

Projection Steréographique.

Théorème.

L'angle de deux courbes est égal à celui de leurs projections stéréographiques.
 on démontre d'abord que la projection d'une corde AB et la corde ab. — On
 il suit, à la limite, que la projection de la tangente à une courbe est la tangente
 de la projection.

Cela posé, faisons la figure.



Soient MH, MK deux courbes sphériques, mh, mk leurs projections.

Ma, Mb les tangentes en M;

ma, mb leurs projections.

Menons PQ, plan tangent en O, et prolongeons Ma et Mb jusqu'à leur
 intersections A et B avec ce plan.

L'angle amb = AOB, comme ayant leurs côtés parallèles.

Mais on a

$$\left. \begin{array}{l} AM = Ao \\ BM = Bo \end{array} \right\} \text{ comme tangentes à la sphère.}$$

Donc

$$\text{Triangle } AOB = AMB$$

$$\text{angle } AOB = AMB$$

Donc

$$\text{angle } amb = AMB$$

q.f.d.

Trigonométrie Sphérique.

Problème.

Un triangle Sphérique est donné par deux de ses côtés, c , b , et l'angle compris A .
 Un des éléments subit une variation. on demande celle de tous les autres.

Supposons que b devienne AC_1 , et cherchons la variation de a .

Prenez pour cela

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

Comme les variations sont très-petites, il suffira de différentier (ce qui revient à développer en ne conservant que les quantités du 1^{er} ordre).

$$\begin{aligned} -\sin a da &= -\sin b \cos c db + \cos b \sin c \cos A db \\ &= (-\sin b \cos c + \cos b \sin c \cos A) db \end{aligned}$$

or on sait que

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A$$

Substituant, il vient

$$-\sin a da = -\sin a \cos C db$$

ou

$$da = \cos C db$$

on trouverait probablement dB et dC .

(Leverrier - 1849.)



Problème.

Résoudre un triangle Rectangle, connaissant a et C .

Ce cas se présente souvent dans la pratique : a désigne la longitude d'un astre, et C l'obliquité du plan de son orbite sur celui de l'écliptique.

C est donc en général très-petit.

on a les formules

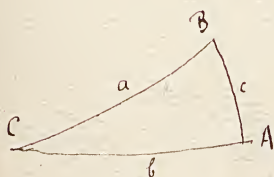
$$\begin{cases} \sin c = \sin a \sin C \\ \tan b = \tan a \cos C \end{cases}$$

Il est nécessaire, pour la rapidité et la facilité du calcul, et pour la précision des résultats, de transformer la 2^e formule. Quant à la première, elle peut toujours subsister : car un très-petit angle peut très-bien se calculer au moyen de son sinus.

Comment donc transformerons-nous la 2^e formule ?

Malheureusement, cela est indispensable : car, dans un intervalle de 5', une variation de l'arc nul, le cosinus, dans les tables, a un logarithme nul, d'une valeur invariable. On ne peut donc se servir de $\cos C$ pour calculer $\tan b$. Il en est de même du sinus pour les angles voisins de 90°. On conclut de là que, sauf dans des cas particuliers, le sinus et le cosinus sont de mauvaises lignes trigonométriques, et qu'il faut toujours chercher à les faire disparaître des formules générales. La tangente au contraire peut toujours et doit le plus souvent être de préférence employée, parce qu'elle varie avec une très-grande rapidité au voisinage de l'angle.

ainsi, C étant toujours petit, nous transformerons la première formule,



et nous allons transformer la seconde.

Posez

$$(1) \quad b = a + 2c.$$

et on a

$$\operatorname{tg} b = \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\frac{e^{b\sqrt{-1}} - e^{-b\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}}{\frac{e^{b\sqrt{-1}} + e^{-b\sqrt{-1}}}{2}}$$

on aurait de même $\operatorname{tg} a$. - Donc la formule que nous voulons transformer peut s'écrire

$$\frac{e^{b\sqrt{-1}} - e^{-b\sqrt{-1}}}{e^{b\sqrt{-1}} + e^{-b\sqrt{-1}}} = \cos C \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}$$

Divisant haut et bas par $e^{-b\sqrt{-1}}$ et $e^{-a\sqrt{-1}}$, il vient

$$\frac{e^{2b\sqrt{-1}} - 1}{e^{2b\sqrt{-1}} + 1} = \cos C \frac{e^{2a\sqrt{-1}} - 1}{e^{2a\sqrt{-1}} + 1}$$

Trouvons donc $e^{2b\sqrt{-1}}$ après j'aurai b en fonction de a : nous pourrions écrire

$$\frac{e^{2b\sqrt{-1}}}{e} = \frac{e^{2a\sqrt{-1}}(1 + \cos C) + (1 - \cos C)}{e^{2a\sqrt{-1}}(1 - \cos C) + (1 + \cos C)}$$

ou bien, en divisant haut et bas par $1 + \cos C$, et remarquant que $\frac{1 - \cos C}{1 + \cos C} = \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}$

$$\frac{e^{2b\sqrt{-1}}}{e} = \frac{e^{2a\sqrt{-1}} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}}{e^{2a\sqrt{-1}} \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} + 1}$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{e^{2b\sqrt{-1}}}{e} = e^{2a\sqrt{-1}} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \cdot e^{-2a\sqrt{-1}}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \cdot e^{2a\sqrt{-1}}}$$

on voit que, si C est très-petit, $e^{2b\sqrt{-1}}$ diffère très-peu de $e^{2a\sqrt{-1}}$.

Pris les logarithmes népériens, et divisant par $2\sqrt{-1}$, j'ai

$$b = a + \frac{1}{2\sqrt{-1}} \mathcal{L} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \cdot e^{-2a\sqrt{-1}}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \cdot e^{2a\sqrt{-1}}}$$

D'où

$$x = b - a = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ \mathcal{L} (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \cdot e^{-2a\sqrt{-1}}) - \mathcal{L} (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \cdot e^{2a\sqrt{-1}}) \right\}.$$

Développant en séries nous aurons :

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ \begin{aligned} & \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \cdot e^{-2a\sqrt{-1}} - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^4 \frac{C}{2} \cdot e^{-4a\sqrt{-1}} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^6 \frac{C}{2} \cdot e^{-6a\sqrt{-1}} - \dots \\ & - \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \cdot e^{2a\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^4 \frac{C}{2} \cdot e^{4a\sqrt{-1}} - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^6 \frac{C}{2} \cdot e^{6a\sqrt{-1}} + \dots \end{aligned} \right\}$$

Nous pourrions réduire, car les deux termes en $\operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}$ donnent

$$-\operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \cdot \frac{e^{2a\sqrt{-1}} - e^{-2a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \quad \text{ou} \quad -\operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \cdot \sin 2a$$

et de même pour les autres : - simplifions donc, et ayons regard à ce que $x = b - a$. Il viendra :

$$b = a - \operatorname{Tg} \frac{1}{2} C \cdot \sin 2a + \frac{1}{2} \operatorname{Tg}^3 \frac{1}{2} C \cdot \sin 4a - \frac{1}{3} \operatorname{Tg}^5 \frac{1}{2} C \cdot \sin 6a + \text{etc.}$$

on aurait aussi de même

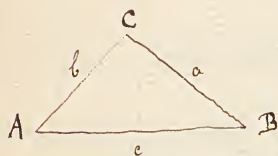
$$a = b + \operatorname{Tg} \frac{1}{2} C \cdot \sin 2b + \frac{1}{2} \operatorname{Tg}^3 \frac{1}{2} C \cdot \sin 4b + \frac{1}{3} \operatorname{Tg}^5 \frac{1}{2} C \cdot \sin 6b + \text{etc.}$$

Bien à propos ces formules démontrent que ces lettres, qui représentent des Rapports au Rayon, représentent des minutes et des secondes. — Il n'y a pour cela qu'à diviser a, b, C par le valeur de $1''$. — Mais cela est supposé fait. Ce sont seulement les nombres abstraits Tg, \sin qu'il faut diviser par $1''$. Mais, dans les Tables, on divise par $\sin 1''$, ce qui revient au même, car $1''$ et $\sin 1''$ ne diffèrent qu'à la 14^e décimale.

De même, au lieu de $2 \sin 1'', 3 \sin 1'', \dots$ on met $\sin 2'', \sin 3'', \dots$ on a 2^e milliers

$$\operatorname{Log} \frac{1}{\sin 1''} = 5,3144251.$$

application du Théorème de Legendre.



$$AB = 32584^m, 62$$

$$A = 64^\circ 24' 17'', 3$$

$$B = 52^\circ 41' 20'', 5$$

Calculer les autres parties, en supposant le Triangle Sphérique, sur la Terre.

D'abord, calculons l'excès Sphérique, et pour cela, la surface du Triangle supposé Rectiligne

$$S = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin A \sin B}{\sin(A+B)}$$

on trouve

$$\log S = 8,6311833.$$

Le $\frac{1}{3}$ de l'excès Sphérique est $\frac{1}{3} \frac{S}{R^2}$. Et ici $R = \frac{1}{2} (a+b)$ a et b étant les arcs de la Terre. $R = 6366739^m$.

$$\log R = 6,8039171$$

$$2 \log R = 13,6078342$$

d'où

$$C^t \log R^2 = 1,3921658$$

$$C^t \log 3 = 9,5222787$$

donc

$$\log \frac{1}{3} \text{ Excès Sph.} = 6,5462278.$$

Il faut réduire en secondes.

$$\log 649000'' = 5,8115750$$

$$C^t \log \pi = 9,5028502$$

$$\hline 7,8606530$$

donc

$$\frac{1}{3} \frac{S}{R^2} = 0'', 72.$$

au lieu de résoudre le Triangle Sphérique, nous résoudrons donc le Triangle Rectiligne dont voici les éléments.

$$AB = 32584^m, 62$$

$$A' = 64^\circ 24' 16'', 6$$

$$B' = 52^\circ 41' 19'', 8$$

$$C' = 62^\circ 54' 23'', 6$$

on trouve

$$b = 29110^m, 43$$

et

$$a = 33009^m, 24.$$

Calcul des Dimensions de la Terre.

Problème.

Connaissant les longueurs D . Deux arcs de 1° pris sur un méridien, et leurs latitudes moyennes, trouver les dimensions de la Terre.

Cela revient à chercher l'expression d'un arc d'ellipses en fonction des axes et de la latitude.

Soit en A l'origine des axes. on a

$$ds = -dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Aussi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Changons de variable, et posons

$$\begin{cases} x = a \sin \varphi \\ y = b \cos \varphi \end{cases} \quad \text{ce que l'on peut faire évident.}$$

Donc

$$\begin{cases} dx = a \cos \varphi d\varphi \\ dy = -b \sin \varphi d\varphi \end{cases}$$

et par suite

$$ds = -a \cos \varphi d\varphi \sqrt{1 + \frac{b^2 \sin^2 \varphi}{a^2}} = -a d\varphi \sqrt{\frac{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}{a^2}} = -a d\varphi \sqrt{\frac{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi}{a^2}}$$

et, en posant $a^2 - b^2 = a^2 e^2$

$$ds = -a d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

Il faut remplacer dans cette expression l'angle φ par l'angle de la normale avec le grand axe de l'ellipse. Soit λ cet angle.

or, il est facile de voir que l'angle φ est sur la figure l'angle BCM' . — Par le point M' , menons une Tangente. Elle rencontrera d'une des a au même point que la Tangente en M . — on a $\lambda = 90^\circ - MTC$ et $M'TC = \varphi$. — Aussi, on a évidemment

$$\frac{Tg MTC}{Tg M'TC} = \frac{b}{a}$$

Donc

$$Tg \lambda Tg \varphi = \frac{a}{b} \quad (1)$$

ainsi

$$Tg \varphi = \frac{a}{b} \cot \lambda \quad \sin \varphi = \frac{\cos \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \lambda}} \quad \cos \varphi = \frac{\sin \lambda \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \lambda}}$$

Il en résulte que

$$\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - e^2 \frac{\cos^2 \lambda}{1 - e^2 \sin^2 \lambda}} = \sqrt{\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \sin^2 \lambda}}$$

Il faut calculer $d\varphi$. — or, si l'on différencie l'équation (1), il vient

$$Tg \varphi \frac{d\lambda}{\cos^2 \lambda} + Tg \lambda \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} = 0$$

Donc

$$d\varphi = - Tg \varphi \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} \frac{d\lambda}{Tg \lambda} = - d\lambda \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sin \lambda \cos \lambda}$$

$$d\varphi = - d\lambda \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin^2 \lambda}$$

D'ou

$$ds = +a \frac{1-e^2}{(1-e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{3}{2}}} d\lambda$$

d'où l'expression à intégrer est

$$ds = +a(1-e^2)(1-e^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{3}{2}} d\lambda$$

Négligeant $\sin^4 \lambda$. Il vient

$$ds = +a(1-e^2) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \lambda \right) d\lambda = +a(1-e^2) \left\{ 1 + \frac{3}{2} e^2 \left(\frac{1-\cos 2\lambda}{2} \right) \right\} d\lambda$$

$$= +a(1-e^2) \left(1 + \frac{3}{4} e^2 - \frac{3}{4} e^2 \cos 2\lambda \right) d\lambda = +a \left(1 - \frac{e^2}{4} \right) d\lambda - \frac{3}{4} a e^2 \cos 2\lambda d\lambda$$

(en négligeant e^4). - Intégrant, il vient

$$s = +a \left(1 - \frac{e^2}{4} \right) \lambda - \frac{3}{8} a e^2 \sin 2\lambda + C$$

Soient λ et λ' les angles correspondants aux extrémités de l'arc :

$$S = a \left(1 - \frac{e^2}{4} \right) (\lambda' - \lambda) - \frac{3}{8} a e^2 (\sin 2\lambda' - \sin 2\lambda)$$

$$S = a \left(1 - \frac{e^2}{4} \right) (\lambda' - \lambda) - \frac{3}{4} a e^2 \sin(\lambda' - \lambda) \cos(\lambda + \lambda')$$

Si $\lambda' - \lambda = 1^\circ$ et $\frac{\lambda + \lambda'}{2} = L$ = latitude moyenne : alors, $\sin(\lambda' - \lambda)$ peut être comparé avec $\lambda' - \lambda = 1^\circ$, dont l'arc mesure est $\frac{\pi}{180}$: et il vient

$$S = \frac{a\pi}{180} \left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} e^2 \cos 2L \right)$$

Pour un autre arc de l'ellipse dont la latitude moyenne serait L' , on aurait le même

$$S' = \frac{a\pi}{180} \left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} e^2 \cos 2L' \right)$$

Ce sont deux Equations qui servent à déterminer a et e .

On trouve

$$e^2 = \frac{4(S' - S)}{S' - S + 3\{S' \cos 2L - S \cos 2L'\}}$$

$$a = \frac{180}{\pi} \frac{S' - S + 3\{S' \cos 2L - S \cos 2L'\}}{3\{\cos 2L - \cos 2L'\}}$$

application.

$$S = 57023^T$$

$$L = 46^\circ 41' 6''$$

$$S' = 57196^T$$

$$L' = 66^\circ 20' 10''$$

D'où

$$e^2 = 0,006329584$$

$$a = 3271766^T$$

$$b = 3261395^T$$

Remarque.

Les formules précédentes peuvent servir à calculer exactement la distance.

pour de la circonférence d'une Ellipse.
Reprenons en effet la formule

$$ds = a(1-e^2)(1-e^2\sin^2\lambda)^{-\frac{3}{2}} d\lambda.$$

on pourrait développer $(1-e^2\sin^2\lambda)^{-\frac{3}{2}}$, et, intégrant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on aurait une série qui exprime la longueur du quart d'ellipse.

Il vaut mieux, pour la simplicité du calcul, prendre

$$ds = -a d\varphi \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}$$

ou

$$ds = -a(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi$$

Ici, en appelant E le quart d'ellipse

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -a(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi.$$

Développons en série. - Nous aurons facilement

$$E = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{8} \frac{1.3}{2.4} e^4 \sin^4 \varphi + \frac{1}{5} \frac{1.3.5}{2.4.6} e^6 \sin^6 \varphi - \frac{1}{7} \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} e^8 \sin^8 \varphi - \dots \right) d\varphi$$

Mais on sait que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x dx = \frac{1.3.5 \dots (2p-1)}{2.4.6 \dots 2p} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (\text{Borda, page 239}).$$

Où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi d\varphi = \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \varphi d\varphi = \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 \varphi d\varphi = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{etc.}$$

Substituant, on aura donc

$$E = \frac{a\pi}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5} \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^2\right)^2 - \frac{1}{7} \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}e^2\right)^2 - \text{etc.} \right\}$$

application.

Trouver la Longueur du métre, Sachant que les axes de l'ellipse de l'équateur sont

$$a = 3272077^T$$

$$b = 3261139$$

On prend la formule précédente, bmise à 4 et les premières termes, avec

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{(a+b)(a-b)}{a^2}$$

on trouve

$$E = 5131180^T$$

Donc la longueur du métre est $0^T, 513118$. Le métre légal a $0^T, 513074$. La différence est de $0^T, 0044$.

Formule d'Interpolation
de Lagrange.

Soit u une fonction d' x .

on connaît trois valeurs u_0, u_1, u_2 correspondant à
 x_0, x_1, x_2

Trouver la valeur u qui correspond à x .

Posons

$$u = ax^2 + bx + c \quad (1)$$

Nous aurons

$$\begin{cases} u_0 = ax_0^2 + bx_0 + c \\ u_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ u_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \end{cases}$$

Ces trois Equations vont nous donner a, b, c .

Si l'on fait le calcul, qu'on substitue dans l'Equation (1), et qu'on y mette u_0, u_1 et u_2 en facteurs, on y trouve ce résultat simple et très-symétrique

$$u = u_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + u_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + u_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

application.

Le 24 avril 1844 à 11^h 17^m 38^s de temps moyen Julien de l'observation, on a trouvé par le calcul que la distance vraie de α de la Vierge au Centre de la Lune est
41° 53' 10"

on demande la longitude de la Lune.

Il suffit de chercher d'après la connaissance des temps l'heure de Paris à laquelle correspond la distance observée.

En désignant par u les heures, par x les distances lunaires, voici ce que l'on trouve dans les Tables.

$$x_0 = 41^\circ 53' 24''$$

$$u_0 = 21^h$$

$$x_1 = 80 \quad 20 \quad 50$$

$$u_1 = 24$$

$$x_2 = 74 \quad 45 \quad 57$$

$$u_2 = 27$$

on pourrait chercher simplement par une proportion l'heure correspondante à
 $x = 81^\circ 53' 10''$

et l'on trouverait

$$u = 21^h 4^m 15^s$$

Cherchons maintenant par interpolation: et appliquons la formule précédente. Nous aurons

$$u = 21 \cdot \frac{1^\circ 31' 20'' \times 3^\circ 7' 13''}{1^\circ 34' 54'' \times 3^\circ 9' 27''} + 24 \cdot \frac{2^\circ 14'' \times 3^\circ 7' 13''}{1^\circ 34' 54'' \times 1^\circ 54' 53''} - 27 \cdot \frac{2^\circ 14'' \times 1^\circ 34' 50''}{3^\circ 9' 27'' \times 1^\circ 34' 53''}$$

$$u = 21 \cdot \frac{5540 \cdot 11233}{5674 \cdot 11367} + 24 \cdot \frac{134 \cdot 11233}{5674 \cdot 5693} - 27 \cdot \frac{134 \cdot 5540}{11367 \cdot 5693}$$

Calculant par logarithmes, on trouve

$$u = 20,262 + 1,118 - 0,309$$

ou bien

21^h 4^m 12^s
 la différence des heures est donc
 9^h 46^m 34^s

Réduisant en degrés, on trouve.

146° 39' 30"

La longitude de l'île est d'ailleurs occidentale.

Si l'on n'a simplement fait usage des parties proportionnelles, on est parvenu
 pour la différence des heures

9^h 46^m 37^s

correspondant à une longitude. Ouest

146° 39' 15"

Le problème suivant va nous montrer comment on peut calculer la distance
 vraie, c.à.d. rapportée au centre de la Terre.

Problème.

Un observateur placé à 7^m au-dessus de la mer observe la hauteur apparente du
 centre de la Lune = 42° 31' 25", la hauteur apparente d'une étoile = 53° 14' 36", enfin
 la distance apparente de ces deux astres = 37° 43' 17". Calculer la distance vraie. (x)

s) Sachant que la
 parallèle horizontale
 de la lune au mont.
 d'observation est
 59' 46".

1°. La première chose à faire, c'est de corriger ces hauteurs de la dépression de
 l'horizon. - or, il y a des tables pour cela (il doit y en avoir).

Alors, à défaut de tables, il me semble qu'on pourrait agir de la manière
 suivante.

Soit D la dépression, h la hauteur au-dessus de la mer, r le rayon moyen
 de la Terre 6366740^m (on n'en peut être, le rayon de courbure de l'ellipse pour la
 latitud. λ : $\rho = \frac{ds}{d\lambda} = a(1-e^2)(1-e^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{3}{2}}$.) on a

$$\frac{r}{r+h} = \cos D = 1 - 2 \sin^2 \frac{D}{2}$$

Il en

$$\sin^2 \frac{D}{2} = \frac{h}{2(r+h)}$$

(En appliquant cette formule, je trouve ici pour la dépression 4' 36" : tandis que Bureau
 met 4' 46" : pourquoi ?)

Alors, on peut déterminer directement la dépression de l'horizon au moyen
 de deux observations faites avec le sextant et une même étoile. Supposons celle-ci
 près du zénith. observons rapidement sa hauteur H au-dessus de l'horizon ; retour-
 nous-nous de 180°, et observons sa hauteur H' : H' devrait être le supplément
 de H . Donc $H' + H - 180^\circ$ donne le double de la dépression.

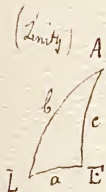
2°. Si deux hauteurs étant corrigées de la dépression, on en déduit les
 distances zénithales corrigées de la dépression seulement.

Elles servent à calculer l'angle des deux azimuts, par la formule

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin (s-a)}{\sin b \cdot \sin c}}$$

applicable dans le triangle apparent ALE dont on connaît les 3 côtés.

3°. Cela fait, et A trouvé, on corrige la distance zénithale de la lune



De la Réfraction et De la parallaxe, et celle De l'étoile De la Réfraction. - on a ainsi les distances véritables et A : on peut avoir la vraie valeur de a .
Car

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ &= \cos b (\cos c + \tan b \tan c \cos A)\end{aligned}$$

on pose

$$\tan b \cos A = \tan \varphi$$

d'où

$$\cos a = \cos b (\cos c + \tan \varphi \tan c) = \frac{\cos b}{\cos \varphi} \cos (c - \varphi)$$

d'où a .

Quant aux corrections de Réfraction et de parallaxe, voir Bricaut.

Voir le même pour la détermination de l'azimut.

365

425

447

